

**Stationäres und instationäres Verhalten  
von zwei gekoppelten Wärmeübertragern  
mit umlaufendem Fluidstrom**

Vom Fachbereich Maschinenbau  
der Universität der Bundeswehr Hamburg  
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs  
genehmigte

DISSERTATION  
vorgelegt von  
Dipl.-Ing. Chakkrit Na Ranong

**DISTRIBUTION STATEMENT A**  
Approved for Public Release  
Distribution Unlimited

20030107 065

aus Pinneberg

Hamburg 2001

# REPORT DOCUMENTATION PAGE

Form Approved OMB No. 0704-0188

Public reporting burden for this collection of information is estimated to average 1 hour per response, including the time for reviewing instructions, searching existing data sources, gathering and maintaining the data needed, and completing and reviewing the collection of information. Send comments regarding this burden estimate or any other aspect of this collection of information, including suggestions for reducing this burden to Washington Headquarters Services, Directorate for Information Operations and Reports, 1215 Jefferson Davis Highway, Suite 1204, Arlington, VA 22202-4302, and to the Office of Management and Budget, Paperwork Reduction Project (0704-0188), Washington, DC 20503.

1. AGENCY USE ONLY (Leave blank)		2. REPORT DATE November 2001		3. REPORT TYPE AND DATES COVERED Dissertation	
4. TITLE AND SUBTITLE  Stationaeres und instationaeres Verhalten von zwei gekoppelten Waermeuebertragern mit umlaufendem Fluidstrom  Stationary and Non-Stationary Behavior of Two Coupled Heat Exchangers with Circuitous Fluid Flow				5. FUNDING NUMBERS	
6. AUTHOR(S)  Chakkrit Na Ranong					
7. PERFORMING ORGANIZATION NAME(S) AND ADDRESS(ES)  Fachbereich Maschinenbau, Universitaet der Bundeswehr Hamburg				8. PERFORMING ORGANIZATION Report Number REPORT NUMBER	
9. SPONSORING/MONITORING AGENCY NAME(S) AND ADDRESS(ES)				10. SPONSORING/MONITORING AGENCY REPORT NUMBER	
11. SUPPLEMENTARY NOTES  Text in German. Title and abstract in German and English, 166 pages, November 2001.					
12a. DISTRIBUTION/AVAILABILITY STATEMENT  Distribution A: Public Release.				12b. DISTRIBUTION CODE	
<p>ABSTRACT (Maximum 200 words)</p> <p>This dissertation covers the following subjects: the optimization of stationary usage; methods of approach in the testing of non-stationary behavior, including basic equations; calculation of non-stationary behavior with the Laplace transformation; calculation of non-stationary behavior using the Finite Difference method; examples of non-stationary behavior. The final chapter is a summary of the test results, divided categorically: stationary terminal state; differential equations for the calculation of fields of dimensionless temperature fluctuations; the solution in the frequency field, and then, once more, the Finite Difference equations previously employed. The results lead to an inquiry regarding their plausibility and applicability to other forms of currents.</p>					
14. SUBJECT TERMS  German, UNIBW, Stationary behavior, Non-stationary behavior, Finite difference method, Temperature fluctuations, Laplace transformation				15. NUMBER OF PAGES	
				16. PRICE CODE	
17. SECURITY CLASSIFICATION OF REPORT  UNCLASSIFIED	18. SECURITY CLASSIFICATION OF THIS PAGE  UNCLASSIFIED	19. SECURITY CLASSIFICATION OF ABSTRACT  UNCLASSIFIED	20. LIMITATION OF ABSTRACT  UNLIMITED		

NSN 7540-01-280-5500

Standard Form 298 (Rev. 2-89)  
Prescribed by ANSI Std. Z39-18  
298-102

**Stationäres und instationäres Verhalten  
von zwei gekoppelten Wärmeübertragern  
mit umlaufendem Fluidstrom**

Vom Fachbereich Maschinenbau  
der Universität der Bundeswehr Hamburg  
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs  
genehmigte

DISSERTATION  
vorgelegt von  
Dipl.-Ing. Chakkrit Na Ranong

aus Pinneberg

Hamburg 2001

AQ F03-03-0478

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Wilfried Roetzel  
Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Jobst Hapke

Tag der mündlichen Prüfung: 12. November 2001

## Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Thermodynamik der Universität der Bundeswehr Hamburg.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Roetzel, der diese Arbeit angeregt und betreut hat, danke ich ganz besonders herzlich für die wertvollen Diskussionen und seine fachliche Unterstützung.

Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Hapke von der Technischen Universität Hamburg Harburg danke ich für sein Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Korreferates.

Desweiteren danke ich allen Freunden und Kollegen, die mir während der Fertigstellung meiner Dissertation mit Rat und Tat hilfreich zur Seite gestanden haben. Mein Dank gilt auch meiner Familie, die meine Entwicklung stets unterstützt und gefördert hat.

Diese Arbeit wurde mit Unterstützung der Universität der Bundeswehr Hamburg gedruckt.

Hamburg, im November 2001

Chakkrit Na Ranong

## Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung . . . . .	1
2	Optimierung des stationären Betriebs . . . . .	5
2.1	Durchführung der Extremwertrechnung . . . . .	13
2.2	Unendlich große $NTU$ -Werte . . . . .	14
2.3	Konstante $NTU$ -Werte . . . . .	18
2.4	Beispiele . . . . .	22
3	Vorgehensweise bei der Untersuchung des instationären Verhaltens . . . . .	30
4	Grundgleichungen . . . . .	33
4.1	Gleichungen für die Temperaturfelder der strömenden Fluide . . . . .	33
4.2	Wärmeübertragende Wand zwischen den beiden Fluidströmen . . . . .	47
4.3	Rohrwand der Verbindungsleitungen . . . . .	49
4.4	Zusammenhang zwischen Wärmeübergangskoeffizient und Strömungs- geschwindigkeit . . . . .	50
4.5	Einführung der Schwankungsgrößen . . . . .	51
4.6	Anfangsbedingungen . . . . .	52
4.7	Kontinuitätsgleichung für den Umlaufstrom . . . . .	53
4.8	Linearisierung der Energiegleichungen . . . . .	54
4.9	Einführung einer dimensionslosen Temperatur . . . . .	55
4.10	Rand- und Kopplungsbedingungen . . . . .	56
4.11	Stationäre Temperaturfelder . . . . .	60
5	Berechnung des instationären Verhaltens mit der Laplace-Transformation . .	62
6	Berechnung des instationären Verhaltens mit dem Finite-Differenzen-Verfahren	64
6.1	Aufbau des Rechnernetzes . . . . .	64
6.2	Approximation der exakten Energiegleichungen durch finite Differenzen- gleichungen . . . . .	66
6.3	Anfangs- und Randbedingungen . . . . .	69
6.4	Kopplungsbedingungen . . . . .	69
6.5	Netzgenerierung . . . . .	73
7	Beispiele zum instationären Verhalten . . . . .	80
7.1	Verhalten des Gesamtsystems . . . . .	85
7.2	Verdeutlichung der Auswirkungen der inneren Zirkulation . . . . .	86

7.3	Systemantwort auf die Testfunktionen Sprung und harmonische Schwin- gung . . . . .	94
8	Zusammenfassung . . . . .	117
A	Stationärer Ausgangszustand . . . . .	120
A.1	Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom unvermischt, Um- laufstrom quervermischt) . . . . .	120
A.2	Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom quervermischt, Um- laufstrom unvermischt) . . . . .	121
A.3	Gegenstrom . . . . .	122
A.4	Verbindungsleitung . . . . .	124
A.5	Kopplung . . . . .	125
B	Differentialgleichungen zur Berechnung der Felder der dimensionslosen Tem- peraturschwankungen . . . . .	126
B.1	Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom unvermischt, Um- laufstrom quervermischt) . . . . .	126
B.2	Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom quervermischt, Um- laufstrom unvermischt) . . . . .	127
B.3	Gegenstrom . . . . .	128
B.4	Verbindungsleitung . . . . .	129
C	Lösung im Frequenzbereich . . . . .	131
C.1	Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom unvermischt, Um- laufstrom quervermischt) . . . . .	131
C.2	Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom quervermischt, Um- laufstrom unvermischt) . . . . .	135
C.3	Gegenstrom . . . . .	139
C.4	Verbindungsleitung . . . . .	144
C.5	Kopplung . . . . .	146
D	Finite-Differenzen-Gleichungen . . . . .	149
D.1	Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom unvermischt, Um- laufstrom quervermischt) . . . . .	149
D.2	Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom quervermischt, Um- laufstrom unvermischt) . . . . .	152
D.3	Gegenstrom . . . . .	155
D.4	Verbindungsleitung . . . . .	158
	Literatur . . . . .	160

## Formelzeichen

### Lateinische Buchstaben

$A$	Fläche, $\text{m}^2$
$\underline{A}$	Matrix mit dimensionslosen Elementen $a_{i,j}$
$A_G$	Grundfläche, $\text{m}^2$
$A_q$	Querschnittsfläche, $\text{m}^2$
$A_R$	Rippenoberfläche, $\text{m}^2$
$a$	Temperaturleitfähigkeit, $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
$a_{\text{Fou}}$	Fourierkoeffizient, dimensionslos
$a_0$	dimensionsloser Parameter
$b_0$	dimensionsloser Parameter
$b_{\text{Fou}}$	Fourierkoeffizient, dimensionslos
$C_p$	isobare Wärmekapazität, $\frac{\text{J}}{\text{K}}$
$C_0$	Konstante
$c_p$	spezifische isobare Wärmekapazität, $\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$
$c_0$	dimensionsloser Parameter
$d_0$	dimensionsloser Parameter
$f$	Funktion
$\vec{f}$	Flächenvektor, $\text{m}^2$
$h_0$	dimensionsloser Parameter
$k$	Wärmedurchgangskoeffizient, $\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$
$k_0$	dimensionsloser Parameter
$K_{\text{geom}}$	geometrische Kennzahl, dimensionslos
$L$	Länge einer Verbindungsleitung, m
$L_c$	charakteristische Länge, m
$l$	Ortskoordinate, m
$m$	Exponent, dimensionslos
$m^k$	Anzahl der Intervalle in Ortsrichtung im Zeitschritt $k$
$\bar{N}_{1i}$	dimensionsloser Parameter, $\bar{N}_{1M} = (\bar{\alpha}_{1M} A_{1M}) / \bar{W}_{1M}$ , $M = I, II$
$N'_{1i}$	dimensionsloser Parameter, $N'_{1M}(\tau) = (\alpha'_{1M} A_{1M}) / \bar{W}_{1M}$ , $M = I, II$
$\bar{N}_{2i}$	dimensionsloser Parameter, $\bar{N}_{2M} = (\bar{\alpha}_{2M} A_{2M}) / \bar{W}_{2M}$ , $M = I, II, r, l$
$N'_{2i}$	dimensionsloser Parameter, $N'_{2M}(\tau) = (\alpha'_{2M} A_{2M}) / \bar{W}_{2M}$ , $M = I, II, r, l$
$Nu$	Nußeltzahl, dimensionslos
$NTU$	Zahl der Übertragungseinheiten, dimensionslos



$n$	Exponent, dimensionslos
$n_{Fou}$	Anzahl der Punkte bei der Fourier-Analyse
$n^k$	Anzahl der Intervalle in Ortsrichtung im Zeitschritt $k$
$o$	Anzahl der Intervalle in Zeitrichtung beim Finite-Differenzenverfahren
$P$	dimensionslose Temperaturänderung eines Hauptstroms
$Pr$	Prandtlzahl, dimensionslos
$p_0$	dimensionsloser Parameter
$\dot{q}$	Wärmestromdichte, $\frac{W}{m^2}$
$R$	Wärmekapazitätsstromverhältnis, z.B. $R_{1I,1II} = \overline{W}_{1I} / \overline{W}_{1II}$ , dimensionslos
$R_a$	Außenradius einer Verbindungsleitung, m
$R_0$	Innenradius einer Verbindungsleitung, m
$Re$	Reynoldszahl, dimensionslos
$r$	Ortskoordinate, m
$s$	Parameter der Laplace-Transformation, dimensionslos
$T$	Temperatur, K
$T_m$	adiabate Mischtemperatur, K
$T'$	Temperaturschwankung, K
$t$	Zeit, s
$t_B$	Bezugszeit, s
$t_v$	Verweilzeit im stationären Ausgangszustand, s
$U$	innere Energie, J
$u$	spezifische innere Energie, $\frac{J}{kg}$
$V$	Volumen, $m^3$
$w$	Strömungsgeschwindigkeit, $\frac{m}{s}$
$\dot{W}$	Wärmekapazitätsstrom, $\frac{W}{K}$
$X$	Länge, m
$x$	Ortskoordinate, m
$Y$	Länge, m
$y$	Ortskoordinate, m
$Z$	Länge, m
$z$	Ortskoordinate, m

#### Kalligraphische Buchstaben

$\mathcal{F}$	Funktion
$\mathcal{I}$	imaginäre Einheit

#### Griechische Buchstaben

$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient, $\frac{W}{m^2K}$
$\beta$	dimensionsloser Parameter
$\Gamma$	dimensionsloser Parameter
$\gamma_0$	dimensionsloser Parameter
$\delta_W$	Wanddicke, m
$\epsilon$	dimensionslose Temperaturänderung
$\zeta$	dimensionslose Ortskoordinate, $\zeta = z/Z$ bzw. $\zeta = z/L$
$\zeta_{Gn}$	Druckverlustbeiwert, dimensionslos
$\eta$	dimensionslose Ortskoordinate, $\eta = y/Y$
$\eta_R$	Rippenwirkungsgrad, dimensionslos
$\eta_0$	Oberflächenwirkungsgrad, dimensionslos
$\theta$	dimensionslose Temperatur, $\theta = \frac{T-T_{1, \text{ein}II}}{T_{1, \text{ein}I}-T_{1, \text{ein}II}}$
$\theta'$	dimensionslose Temperaturschwankung, $\theta' = \frac{T'}{T_{1, \text{ein}I}-T_{1, \text{ein}II}}$
$\kappa_{1M}$	dimensionsloser Parameter, $\kappa_{1M} = t_{v1M}/t_B$ , $M = I, II$
$\kappa_{2M}$	dimensionsloser Parameter, $\kappa_{2M} = t_{v2M}/t_B$ , $M = I, II$
$\Lambda$	dimensionslose Wellenzahl
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit, $\frac{W}{mK}$
$\nu$	kinematische Viskosität, $\frac{m^2}{s}$
$\Xi$	dimensionsloser Parameter
$\xi$	dimensionslose Ortskoordinate, $\xi = x/X$
$\varrho$	Dichte, $\frac{kg}{m^3}$
$\sigma_{1M}$	dimensionsloser Parameter, $\sigma_{1M}(\tau) = w'_{1M}/\bar{w}_{1M}$ , $M = I, II$
$\sigma_2$	dimensionsloser Parameter, $\sigma_2(\tau) = w'_{2M}/\bar{w}_{2M}$ , $M = I, II, r, l$
$\tau$	dimensionslose Zeitkoordinate, $\tau = t/t_B$
$\tau_e$	Endwert der dimensionslosen Zeitkoordinate beim Finite-Differenzen-Verfahren
$\Upsilon$	Quellterm, $\frac{W}{m}$
$\Phi$	volumetrische Dissipationsleistung, $\frac{W}{m^3}$
$\chi$	dimensionsloser Parameter
$\Psi$	dimensionsloser Parameter
$\Omega$	dimensionslose Kreisfrequenz
$\omega_M$	dimensionsloser Parameter, $\omega_M = (C_{WI}/C_{1I})\kappa_{1M}$ , $M = I, II$
$\omega_M$	dimensionsloser Parameter, $\omega_M = (C_{WM}/C_{2M})\kappa_{2M}$ , $M = r, l$

# Indizes

*aus* Austritt

<i>ein</i>	Eintritt
<i>g</i>	Gegenstrom
<i>i</i>	Laufindex
<i>j</i>	Laufindex
<i>k</i>	Laufindex
<i>l</i>	linke Verbindungsleitung
<i>M</i>	Index zur Kennzeichnung eines Untersystems, $M = I, II, r, l$
<i>max</i>	Maximum
<i>opt</i>	Optimum
<i>r</i>	rechte Verbindungsleitung
<i>sys</i>	System
<i>tot</i>	Gesamtgröße
<i>turb</i>	turbulent
<i>W</i>	Wand
0	Bezugszustand
1	Hauptstrom
2	Umlaufstrom
1 $q$	Fluidstrom 1 quervermischt
2 $q$	Fluidstrom 2 quervermischt
<i>I</i>	Wärmeübertrager <i>I</i>
<i>II</i>	Wärmeübertrager <i>II</i>
$\infty$	stationärer Endzustand

#### **Hochzeichen**

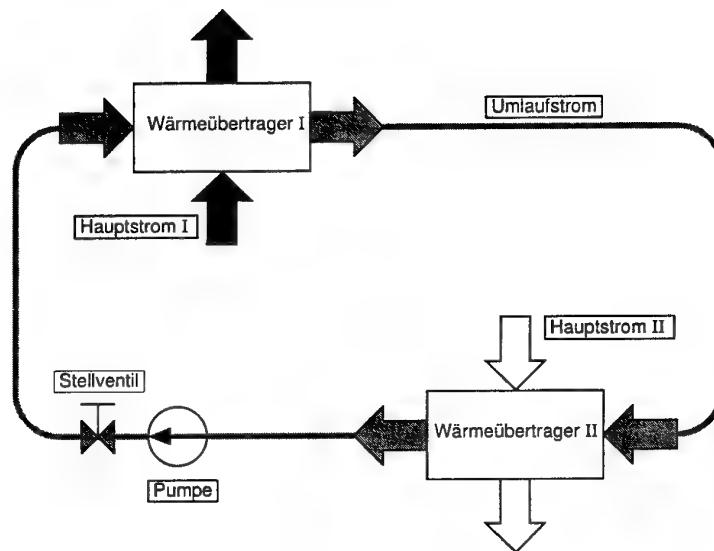
'	Schwankungsgröße
–	Wert im stationären Ausgangszustand
˜	Laplace-Transformierte

#### **Sonstige Symbole**

$\Im$	Imaginärteil einer komplexen Zahl
$\Re$	Realteil einer komplexen Zahl

## 1 Einleitung

In nahezu allen energietechnischen und verfahrenstechnischen Anlagen kommen Wärmeübertrager zum Einsatz, und zwar als einzelne Anlagenkomponenten oder als zusammengeschaltetes Untersystem. Deren stationäres Verhalten ist weitgehend bekannt, und die Methoden für ihre Berechnung sind weit entwickelt [1] [2]. Wenn eine solche Anlage jedoch angefahren, geregelt oder abgeschaltet wird oder wenn Störungen auftreten, wird das instationäre Verhalten wichtig. Das instationäre Verhalten einzelner Wärmeübertrager ist bereits untersucht worden [3], jedoch nicht das von zusammengeschalteten Systemen, wie sie etwa bei der Wärmerückgewinnung in Rauchgasreinigungsanlagen [4], raumlufttechnischen Anlagen [5] und Gasturbinenanlagen [6] [7] [8] Anwendung finden.



**Abb. 1.1.** System aus zwei gekoppelten Wärmeübertragern mit umlaufendem Fluidstrom.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung eines solchen Systems. Es besteht aus zwei Wärmeübertragern, die durch ein umlaufendes Fluid gekoppelt sind, welches mit einer Pumpe umgewälzt wird, Abb. 1.1. Es dient dazu, Wärme indirekt von einem warmen Hauptstrom I an einen kalten Hauptstrom II zu übertragen.

Meierer [4] beschreibt den Einsatz eines Wärmeverschiebesystems in einer Rauchgasentschwefelungsanlage. Es dient zur Aufheizung der Reingase hinter der Rauchgasentschwefelung, bevor sie durch den Kamin in die Atmosphäre strömen. Zu diesem Zweck wird Wärme indirekt von den heißen Rohgasen (Hauptstrom I) an die Reingase (Hauptstrom II) übertragen. Als umlaufendes Fluid wird flüssiges Wasser verwendet. Bei der Auslegung der Rauchgasentschwefelungsanlage wurde das gekoppelte System einem Regenerator mit rotierender Speichermasse vorgezogen, weil Rein- und Rohgase hier streng getrennt sind [4]. Nur so konnten die Grenzwerte für die Schadstoffkonzentrationen im Reingas eingehalten werden.

Ein weiteres Anwendungsgebiet von zwei gekoppelten Wärmeübertragern ist die Wärmerückgewinnung in raumlufttechnischen Anlagen [5]. Es wird Wärme indirekt zwischen Außenluft und Abluft übertragen. Im Winterbetrieb wird die Außenluft mit Hilfe der Abluft vorgewärmt. Im Sommerbetrieb wird die Außenluft mit Hilfe der Abluft vorgekühlt. Das gekoppelte System wird eingesetzt, weil sich auch große Entfernungen zwischen den Orten, an denen Außenluft und Abluft zur Verfügung stehen, problemlos überwinden lassen [5]. Als umlaufendes Fluid wird Wasser verwendet, dem ein Frostschutzmittel zugesetzt wird [5] [9].

London und Kays [6] untersuchen den Einsatz von zwei gekoppelten Wärmeübertragern in Gasturbinenanlagen. Es wird Wärme indirekt von den heißen Turbinenabgasen (Hauptstrom I) an die verdichtete Luft (Hauptstrom II) übertragen, um sie für die Verbrennung vorzuwärmen. Das umlaufende Fluid ist ein flüssiges Metall, und zwar Natrium, Kalium oder ein Gemisch aus beiden. Erstmals wird festgestellt, daß es einen optimalen Wert für die Größe des Wärmekapazitätsstroms des umlaufenden Fluids gibt. Wenn das System mit diesem betrieben wird, erzielt man die größtmöglichen Temperaturänderungen bei vorgegebenen Eintrittstemperaturen und Wärmekapazitätsströmen der beiden Hauptströme. London und Kays [6] untersuchen zwei gekoppelte Gegenstrom-Wärmeübertrager. Die Wärmekapazitätsströme der beiden Hauptströme sind gleich groß. Die Wärmedurchgangswiderstände in beiden Apparaten sind ebenfalls gleich groß und unabhängig von der Größe des Umlaufstroms. In diesem Sonderfall ist der optimale Wärmekapazitätsstrom des umlaufenden Fluids so groß wie der der Hauptströme [6].

Martin [10] und Roetzel [11] untersuchen den Wert des optimalen Umlaufstroms für einen allgemeineren Fall. Die gekoppelten Gegenstrom-Wärmeübertrager können mit

unterschiedlich großen Wärmekapazitätsströmen der Hauptströme betrieben werden, und die Wärmedurchgangswiderstände in den Einzelapparaten können unterschiedlich groß sein. Es wird aber weiterhin vorausgesetzt, daß der Wärmedurchgangskoeffizient unabhängig von der Größe des Umlaufstroms ist.

Anhand von Zahlenrechnungen hat Martin [10] gezeigt, daß der optimale Wärmekapazitätsstrom des umlaufenden Fluids zwischen den Wärmekapazitätsströmen der Hauptströme liegt. Roetzel [11] hat daraufhin eine Berechnungsformel für den optimalen Wärmekapazitätsstrom des umlaufenden Fluids hergeleitet. Zusätzlich wird eine kostengünstige Aufteilung der wärmeübertragenden Flächen zwischen den Einzelapparaten vorgeschlagen [11].

Neben dem Gegenstrom wurde von Martin [10] der Fall untersucht, daß in den Einzelapparaten einseitig quervermischter Kreuzstrom vorliegt. Dabei ist der Umlaufstrom quervermischt, während die Hauptströme unvermischt sind. Der optimale Umlaufstrom ist unendlich groß.

Alle bisherigen Methoden zur Ermittlung des optimalen Umlaufstroms [6] [10] [11] setzen voraus, daß die Wärmedurchgangskoeffizienten unabhängig von der Größe des Umlaufstroms sind. Diese Vorgehensweise ist gerechtfertigt, wenn der Wärmeübergangswiderstand auf der Seite der umlaufenden Flüssigkeit gegenüber den anderen thermischen Widerständen vernachlässigt werden kann [12].

Jansing [7] und Schneider [8] beschreiben den Einsatz eines Wärmeverschiebesystems mit nachgeschaltetem Abhitzeessel in einem Gasturbinenheizkraftwerk. Auch hier wird Wärme indirekt von den heißen Turbinenabgasen (Hauptstrom I) an die verdichtete Luft (Hauptstrom II) übertragen. Anschließend strömen die Turbinenabgase in einen Abhitzeessel, in dem Heiz- bzw. Prozeßdampf erzeugt wird. Durch die Größe des Umlaufstroms wird eingestellt, welcher Energieanteil der Turbinenabgase für die Erzeugung von Heiz- bzw. Prozeßdampf im Abhitzeessel verwendet wird und welcher für die Vorwärmung der verdichteten Luft.

Wenn die Größe des Umlaufstroms verändert wird, stellt sich erst nach einiger Zeit ein neuer Betriebszustand ein. Von besonderem Interesse ist, nach welcher Zeit sich dieser Betriebszustand einstellt und wie die Temperaturen im System sich mit der Zeit ändern. Es ist das instationäre Verhalten zu untersuchen.

Im Gegensatz zum stationären Verhalten finden sich in der Literatur keine Angaben

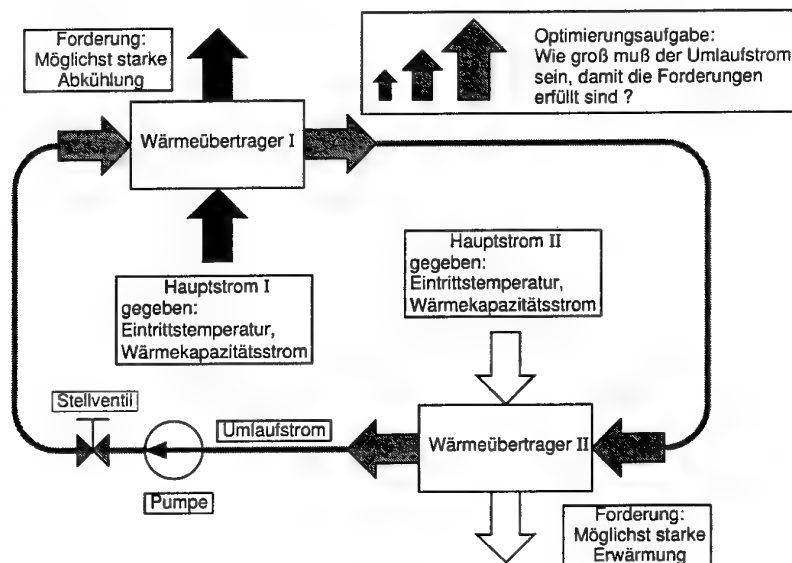
über die Berechnung des instationären Verhaltens des Systems aus zwei gekoppelten Wärmeübertragern mit umlaufendem Fluidstrom. Für einzelne Wärmeübertrager hingegen liegen auch für den instationären Fall zahlreiche Arbeiten vor [3]. Grundlage sind dabei immer Bilanzgleichungen für die Energie. Wenn beliebige Temperatur- und Massenstromschwankungen auftreten, werden die Energiegleichungen üblicherweise linearisiert und mit der Laplace-Transformation gelöst [13] [14] [15]. Ontko und Harris [16] lösen mit einem Finite-Differenzen-Verfahren die Energiegleichungen, ohne sie zu linearisieren. Allerdings werden nur sprungförmige Massenstromänderungen berechnet. Xuan und Roetzel [17] lösen die Energiegleichung ohne Linearisierung mit der Laplace-Transformation und numerischer Rücktransformation für beliebige Änderungen der Eintrittstemperaturen und stufenförmige Änderungen der Massenströme zu Beginn des instationären Prozesses. Ungleichverteilungen der Strömung und Längsvermischung werden durch das Dispersionsmodell berücksichtigt.

In der vorliegenden Arbeit wird für den stationären Fall ein allgemeines Verfahren entwickelt, mit dem der optimale Umlaufstrom berechnet werden kann, wenn die Wärmedurchgangskoeffizienten von der Größe des Umlaufstroms abhängig sind. Es ist notwendig, diese Abhängigkeit zu berücksichtigen, wenn der Wärmeübergangswiderstand auf der Gasseite durch die Anbringung von Rippen so stark verkleinert wird, daß er die Größenordnung des Wärmeübergangswiderstandes auf der Seite der umlaufenden Flüssigkeit hat oder wenn die beiden Hauptströme ebenfalls Flüssigkeiten sind. Ferner wird untersucht, ob es auch für andere Stromführungen als den Gegenstrom einen endlichen Wert für den optimalen Umlaufstrom gibt.

Anschließend werden Verfahren für die Berechnung des instationären Verhaltens von zwei gekoppelten Wärmeübertragern mit umlaufendem Fluidstrom entwickelt. Neben der üblichen Vorgehensweise mit den linearisierten Energiegleichungen wird besonderer Wert darauf gelegt, die Energiegleichungen zu lösen, ohne sie zu linearisieren. Schließlich werden die Berechnungsverfahren auf Beispiele angewendet.

## 2 Optimierung des stationären Betriebs

Im folgenden wird ein Optimierungskriterium für die Größe des Umlaufstroms im stationären Betrieb aufgestellt.



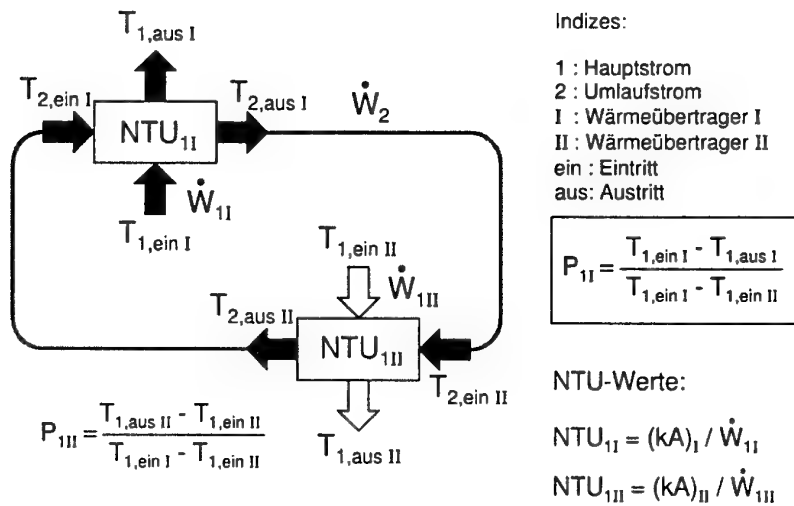
**Abb. 2.1.** Formulierung der Optimierungsaufgabe für den stationären Betrieb eines Systems aus zwei gekoppelten Wärmeübertragern mit umlaufendem Fluidstrom.

Die Wärmekapazitätsströme und Eintrittstemperaturen der beiden Hauptströme werden ebenso wie die Stromführungen in den Wärmeübertragern vorgegeben, Abb. 2.1.

An den optimierten Betrieb wird die Forderung gestellt, daß sich der warme Hauptstrom I möglichst stark abkühlen soll. Gleichwertig dazu ist aufgrund des ersten Hauptsatzes die Forderung, daß sich der kalte Hauptstrom II möglichst stark erwärmen soll. Die Optimierungsaufgabe lautet:

Wie groß muß der Wärmekapazitätsstrom des umlaufenden Fluids gewählt werden, damit die Forderung nach größtmöglichen Temperaturänderungen der Hauptströme erfüllt wird?





**Abb. 2.2.** Bezeichnungen und Formelzeichen, die zur Beschreibung des Systems und zur Ermittlung des optimalen Umlaufstroms benötigt werden.

Die Größen, die benötigt werden, um das Optimum zu ermitteln, sind in Abb. 2.2 dargestellt. Ihre Formelzeichen tragen meist Doppelindizes. So ist beispielsweise  $\dot{W}_{1I}$  der Wärmekapazitätsstrom des Hauptstroms von Apparat I oder  $T_{1,ein II}$  die Eintrittstemperatur des Hauptstroms von Apparat II.

Der Wärmekapazitätsstrom des umlaufenden Fluids

$$\dot{W}_2 = \dot{m}_2 c_{p2} \quad (2.1)$$

ist aufgrund der Kontinuitätsgleichung und der Annahme, daß seine spezifische Wärmekapazität konstant ist, für alle Untersysteme gleich groß und trägt daher nur einen Index, nämlich 2 für Umlaufstrom.

Die beiden Wärmeübertrager sind durch ihre  $NTU$ -Werte gekennzeichnet. Mit  $k$  wird der Wärmedurchgangskoeffizient bezeichnet und mit  $A$  eine willkürliche Bezugsfläche, Abb. 2.2.

Die dimensionslose Temperaturänderung des Hauptstroms I

$$P_{1I} = \frac{T_{1,ein I} - T_{1,aus I}}{T_{1,ein I} - T_{1,ein II}} \quad (2.2)$$

läßt sich explizit als Funktion der beiden  $NTU$ -Werte und der beiden Wärmekapa-

zitätsstromverhältnisse  $R_{2,1I} = \dot{W}_2/\dot{W}_{1I}$  und  $R_{1I,1II} = \dot{W}_{1I}/\dot{W}_{1II}$  angeben [10] [12]:

$$\frac{1}{P_{1I}} = \frac{1}{\epsilon_{1I}(NTU_{1I}, R_{2,1I})} + \frac{R_{1I,1II}}{\epsilon_{1II}(NTU_{1II}, \underbrace{R_{1I,1II} R_{2,1I}}_{R_{2,1II}})} - \frac{1}{R_{2,1I}}, \quad (2.3)$$

d.h.

$$P_{1I} = P_{1I}(NTU_{1I}, NTU_{1II}, R_{2,1I}, R_{1I,1II}). \quad (2.4)$$

Da die Wärmekapazitätsströme der beiden Hauptströme vorgegeben sind, entfällt das Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{1I,1II}$  in Gl. 2.3 bzw. Gl. 2.4 als unabhängige Veränderliche.

Mit  $\epsilon_{1I}$  und  $\epsilon_{1II}$  werden die dimensionslosen Temperaturänderungen der Fluidströme in den Einzelapparaten nach Gl. 2.5 bzw. 2.6 bezeichnet. Sie sind für eine große Anzahl von Stromführungen als Funktion von  $NTU$ -Wert und Wärmekapazitätsstromverhältnis in Form von Diagrammen und Gleichungen zusammengestellt [1].

$$\epsilon_{1I}(NTU_{1I}, R_{2,1I}) = \frac{T_{1,einI} - T_{1,ausI}}{T_{1,einI} - T_{2,einI}} \quad (2.5)$$

$$\epsilon_{1II}(NTU_{1II}, \underbrace{R_{1I,1II} R_{2,1I}}_{R_{2,1II}}) = \frac{T_{1,ausII} - T_{1,einII}}{T_{2,einII} - T_{1,einII}} \quad (2.6)$$

In der vorliegenden Arbeit werden vier Stromführungen für die Einzelapparate behandelt, und zwar der einseitig quervermischte Kreuzstrom mit quervermischem Umlaufstrom, der einseitig quervermischte Kreuzstrom mit quervermischten Hauptströmen, der Gegenstrom und der reine Kreuzstrom. Die Gleichungen für die dimensionslosen Temperaturänderungen  $\epsilon_{1I}$  und  $\epsilon_{1II}$  sind für die verschiedenen Stromführungen aus dem VDI-Wärmeatlas [1] entnommen worden.

1. Kreuzstrom mit quervermischem Umlaufstrom (Hauptstrom unvermischt):

$$\epsilon_{1I} = R_{2,1I} \left[ 1 - \exp \left( \frac{e^{-NTU_{1I}} - 1}{R_{2,1I}} \right) \right] \quad (2.7)$$

$$\epsilon_{1I}(NTU_{1I} \rightarrow \infty) = R_{2,1I} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{1}{R_{2,1I}} \right) \right] \quad (2.8)$$

$$\epsilon_{1II} = R_{1I,1II} R_{2,1I} \left[ 1 - \exp \left( \frac{e^{-NTU_{1II}} - 1}{R_{1I,1II} R_{2,1I}} \right) \right] \quad (2.9)$$

$$\epsilon_{1II}(NTU_{1II} \rightarrow \infty) = R_{1I,1II} R_{2,1I} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{1}{R_{1I,1II} R_{2,1I}} \right) \right] \quad (2.10)$$

2. Kreuzstrom mit quervermischten Hauptströmen (Umlaufstrom unvermischt):

$$\epsilon_{1I} = 1 - \exp \left[ R_{2,1I} \left( e^{\frac{-NTU_{1I}}{R_{2,1I}}} - 1 \right) \right] \quad (2.11)$$

$$\epsilon_{1I}(NTU_{1I} \rightarrow \infty) = 1 - \exp(-R_{2,1I}) \quad (2.12)$$

$$\epsilon_{1II} = 1 - \exp \left[ R_{1I,1II} R_{2,1I} \left( e^{\frac{-NTU_{1II}}{R_{1I,1II} R_{2,1I}}} - 1 \right) \right] \quad (2.13)$$

$$\epsilon_{1II}(NTU_{1II} \rightarrow \infty) = 1 - \exp(-R_{1I,1II} R_{2,1I}) \quad (2.14)$$

3. Gegenstrom:

$$\epsilon_{1I} = \frac{1 - \exp \left[ \left( \frac{1}{R_{2,1I}} - 1 \right) NTU_{1I} \right]}{1 - \frac{1}{R_{2,1I}} \exp \left[ \left( \frac{1}{R_{2,1I}} - 1 \right) NTU_{1I} \right]} \quad (2.15)$$

$$\epsilon_{1I}(R_{2,1I} = 1) = \frac{NTU_{1I}}{1 + NTU_{1I}} \quad (2.16)$$

$$\epsilon_{1I}(NTU_{1I} \rightarrow \infty) = 1, \quad R_{2,1I} > 1 \quad (2.17)$$

$$\epsilon_{1I}(NTU_{1I} \rightarrow \infty) = R_{2,1I}, \quad R_{2,1I} < 1 \quad (2.18)$$

$$\epsilon_{1II} = \frac{1 - \exp \left[ \left( \frac{1}{R_{1I,1II} R_{2,1I}} - 1 \right) NTU_{1II} \right]}{1 - \frac{1}{R_{1I,1II} R_{2,1I}} \exp \left[ \left( \frac{1}{R_{1I,1II} R_{2,1I}} - 1 \right) NTU_{1II} \right]} \quad (2.19)$$

$$\epsilon_{1II}(R_{1I,1II} R_{2,1I} = 1) = \frac{NTU_{1II}}{1 + NTU_{1II}} \quad (2.20)$$

$$\epsilon_{1II}(NTU_{1II} \rightarrow \infty) = 1, \quad R_{1I,1II} R_{2,1I} > 1 \quad (2.21)$$

$$\epsilon_{1II}(NTU_{1II} \rightarrow \infty) = R_{1I,1II} R_{2,1I}, \quad R_{1I,1II} R_{2,1I} < 1 \quad (2.22)$$

4. reiner Kreuzstrom:

$$\epsilon_{1I} = \frac{R_{2,1I}}{NTU_{1I}} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[ 1 - \exp(-NTU_{1I}) \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} NTU_{1I}^j \right] \left[ 1 - \exp\left(-\frac{NTU_{1I}}{R_{2,1I}}\right) \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left(\frac{NTU_{1I}}{R_{2,1I}}\right)^j \right] \right\} \quad (2.23)$$

$$\epsilon_{1I}(NTU_{1I} \rightarrow \infty) = 1, \quad R_{2,1I} > 1 \quad (2.24)$$

$$\epsilon_{1I}(NTU_{1I} \rightarrow \infty) = R_{2,1I}, \quad R_{2,1I} < 1 \quad (2.25)$$

$$\epsilon_{1II} = \frac{R_{1I,1II} R_{2,1I}}{NTU_{1II}} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[ 1 - \exp(-NTU_{1II}) \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} NTU_{1II}^j \right] \left[ 1 - \exp\left(-\frac{NTU_{1II}}{R_{1I,1II} R_{2,1I}}\right) \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left(\frac{NTU_{1II}}{R_{1I,1II} R_{2,1I}}\right)^j \right] \right\} \quad (2.26)$$

$$\epsilon_{1II}(NTU_{1II} \rightarrow \infty) = 1, \quad R_{1I,1II} R_{2,1I} > 1 \quad (2.27)$$

$$\epsilon_{1II}(NTU_{1II} \rightarrow \infty) = R_{1I,1II} R_{2,1I}, \quad R_{1I,1II} R_{2,1I} < 1 \quad (2.28)$$

Bei der Herleitung von Gl. 2.3 und den Gln. 2.7 bis 2.28, die in Gl. 2.3 eingesetzt werden, sind idealisierende Annahmen getroffen worden, die bei der Berechnung von Wärmeübertragern üblich sind [1]:

- Die Wärmeverluste an die Umgebung und die Dissipation von mechanischer Leistung sind vernachlässigbar;
- Änderungen der kinetischen und potentiellen Energien der Stoffströme sind vernachlässigbar;
- die spezifischen Wärmekapazitäten sind konstant;
- Kolbenströmung liegt in beiden Wärmeübertragern und in den Verbindungsleitungen vor;
- Wärmeleitung und Vermischung in Strömungsrichtung sind vernachlässigbar.

Es werden ausschließlich Prozesse ohne Phasenwechsel betrachtet.

Mit den Annahmen gilt nach dem ersten Hauptsatz

$$\dot{W}_{II}(T_{1,einI} - T_{1,ausI}) = \dot{W}_{III}(T_{1,ausII} - T_{1,einII}) \quad (2.29)$$

oder in dimensionsloser Form

$$R_{II,III}P_{II} = P_{III}. \quad (2.30)$$

Die dimensionslosen Temperaturänderungen der Hauptströme sind proportional zueinander, d.h. wenn die Temperaturänderung des warmen Hauptstroms maximal wird, wird auch die des kalten Hauptstroms maximal.

Um die Gln. 2.7 bis 2.28 auswerten zu können, werden die  $NTU$ -Werte benötigt:

$$NTU_{1M} = \frac{(kA)_M}{\dot{W}_{1M}} \quad M = I, II. \quad (2.31)$$

Im  $NTU$ -Wert ist der Wärmedurchgangswiderstand  $1/(kA)_M$  enthalten. Er ist die Summe aus dem Wärmeübergangswiderstand  $1/(\alpha_{1M}A_{1M})$  auf der Seite des Hauptstroms, dem Wärmeleitungswiderstand der Wand  $R_{WM}$  und dem Wärmeübergangswiderstand  $1/(\alpha_{2M}A_{2M})$  auf der Seite des umlaufenden Fluids:

$$\frac{1}{(kA)_M} = \frac{1}{\eta_{01M}\alpha_{1M}A_{1M}} + R_{WM} + \frac{1}{\eta_{02M}\alpha_{2M}A_{2M}} \quad M = I, II. \quad (2.32)$$

Bei Verwendung der Gl. 2.32 handelt es sich um die übliche Methode für die Berechnung des Wärmedurchgangswiderstands unter näherungsweise Berücksichtigung des Längeneffekts [1]. Der mittlere Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  wird aus einer Korrelation für die mittlere Nußelt-Zahl ( $Nu = \alpha L_c / \lambda$ ) bestimmt. Sie ist eine Funktion der Reynolds-Zahl ( $Re = w L_c / \nu$ ), der Prandtl-Zahl ( $Pr = \nu / a$ ) und von geometrischen Kennzahlen [18]:

$$Nu = f(Re, Pr, K_{geom}). \quad (2.33)$$

Daneben wird der Wärmeübergang und damit die Nußelt-Zahl i.a. von den thermischen Randbedingungen bestimmt, z.B. konstante Wandtemperatur oder konstante Wärmestromdichte [19].

Wenn konstante Stoffwerte vorausgesetzt werden, folgt aus Gl. 2.33, daß der Wärmeübergangskoeffizient für eine feste Geometrie nur eine Funktion der Strömungsgeschwindigkeit ist:

$$\alpha = \alpha(w). \quad (2.34)$$

Mit  $\eta_{01M}$  und  $\eta_{02M}$  werden in Gl. 2.32 die Oberflächenwirkungsgrade bezeichnet. Sie werden bei berippten Oberflächen verwendet [12] und bringen zum Ausdruck, daß Rippenoberflächen nicht voll wirksam sind, da sie dem Wärmeübergang an das Fluid eine kleinere Temperaturdifferenz bieten als das Grundmaterial [18]. Die Oberflächenwirkungsgrade werden aus der Gesamtfläche  $A$ , der Rippenoberfläche  $A_R$  und dem Rippenwirkungsgrad  $\eta_R$  berechnet:

$$\eta_{01M} = 1 - \frac{A_{R1M}}{A_{1M}} (1 - \eta_{R1M}) \quad M = I, II \quad (2.35)$$

$$\eta_{02M} = 1 - \frac{A_{R2M}}{A_{2M}} (1 - \eta_{R2M}) \quad M = I, II. \quad (2.36)$$

Der Rippenwirkungsgrad  $\eta_R$  hängt wiederum vom mittleren Wärmeübergangskoeffizienten ab [18].

Für die Optimumsuche sind die Strömungsgeschwindigkeiten der Hauptströme fest vorgegeben. Aus Gl. 2.34 folgt, daß dann auch die Wärmeübergangskoeffizienten konstant sind. Damit sind die Wärmeübergangswiderstände auf der Seite der Hauptströme für die Optimumsuche Konstanten:

$$\frac{1}{\eta_{01M} \alpha_{1M} A_{1M}} = \text{const} \quad M = I, II. \quad (2.37)$$

Bei der Optimumsuche ändert sich der Wärmekapazitätsstrom des umlaufenden Fluids in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit:

$$\dot{W}_{2M} = \varrho_2 A_{q2M} w_{2M} c_{p2} \quad M = I, II. \quad (2.38)$$

Nach Gl. 2.34 ist der Wärmeübergangskoeffizient eine Funktion der Strömungsgeschwindigkeit. Damit sind die Wärmeübergangswiderstände auf der Seite des umlaufenden Fluids Funktionen der jeweiligen Strömungsgeschwindigkeiten.

In den Einzelapparaten wird Wärme von einem gasförmigen Hauptstrom an einen flüssigen Umlaufstrom übertragen, Abschnitt 1. Der Wärmeübergangskoeffizient auf der Seite der Flüssigkeit ist in der Regel sehr viel größer als auf der Seite des Gases [1]. Man wird daher Rippen auf der Gasseite anbringen, um den Wärmedurchgangswiderstand zu verkleinern, und die Seite der umlaufenden Flüssigkeit unberippt lassen. Dann entfallen die Oberflächenwirkungsgrade  $\eta_{02M}$ . Für die Wärmeübergangswiderstände auf der Seite der umlaufenden Flüssigkeit gilt

$$\frac{1}{\eta_{02M} \alpha_{2M} A_{2M}} = \frac{1}{\alpha_{2M} (w_{2M}) A_{2M}} \quad M = I, II. \quad (2.39)$$

Wenn konstante Stoffwerte angenommen werden, sind die Wärmeleitungswiderstände der wärmeübertragenden Wände konstant:

$$R_{WM} = \text{const} \quad M = I, II. \quad (2.40)$$

In Gas-Gas- oder Gas-Flüssigkeit-Wärmeübertragern kann der Wärmeleitungswiderstand der Wände in der Regel gegenüber den anderen thermischen Widerständen in Gl. 2.32 vernachlässigt werden [12].

Die Gln. 2.32, 2.37, 2.39 und 2.40, in Gl. 2.31 eingesetzt, ergeben folgende Beziehung für die  $NTU$ -Werte:

$$\frac{1}{NTU_{1M}} = \underbrace{\frac{\dot{W}_{1M}}{\eta_{01M} \alpha_{1M} A_{1M}} + \overset{\approx 0}{R_{WM}} \dot{W}_{1M}}_{\text{const}} + \frac{\dot{W}_2(w_{2M})}{\alpha_{2M} (w_{2M}) A_{2M}} \frac{\dot{W}_{1M}}{\dot{W}_2(w_{2M})} \quad M = I, II. \quad (2.41)$$

Für eine kompakte Darstellung werden folgende Parameter eingeführt:

$$N_{1M} = \left[ \frac{\dot{W}_{1M}}{\eta_{01M} \alpha_{1M} A_{1M}} + \overset{\approx 0}{R_{WM}} \dot{W}_{1M} \right]^{-1} \quad M = I, II \quad (2.42)$$

$$N_{2M} = \frac{\alpha_{2M} (w_{2M}) A_{2M}}{\dot{W}_2(w_{2M})} \quad M = I, II. \quad (2.43)$$

Die Gln. 2.42 und 2.43, in Gl. 2.41 eingesetzt, ergeben

$$\frac{1}{NTU_{1M}} = \frac{1}{N_{1M}} + \frac{1}{N_{2M}R_{2,1M}} \quad M = I, II. \quad (2.44)$$

In die Parameter  $N_{2M}$  und in das Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,1M}$  werden die Nußelt-Zahl, die Reynolds-Zahl und die Prandtl-Zahl eingeführt:

$$N_{2M} = Nu_{2M}(Re_{2M}) \frac{A_{2M}}{A_{q2M}} Re_{2M}^{-1} Pr_{2M}^{-1} \quad M = I, II \quad (2.45)$$

$$R_{2,1M} = \frac{\lambda_2}{\lambda_{1M}} \frac{L_{c1M}}{L_{c2M}} \frac{A_{q2M}}{A_{q1M}} \frac{Re_{2M}}{Re_{1M}} \frac{Pr_{2M}}{Pr_{1M}} \quad M = I, II. \quad (2.46)$$

Die beiden Veränderlichen in den Gln. 2.45 und 2.46 sind die Reynolds-Zahlen  $Re_{2I}$  und  $Re_{2II}$ . Sie sind durch die Kontinuitätsgleichung gekoppelt:

$$Re_{2II} = \frac{A_{q2I}}{A_{q2II}} \frac{L_{c2II}}{L_{c2I}} Re_{2I}. \quad (2.47)$$

Mit Gl. 2.47 wird die Reynoldzahl  $Re_{2II}$  aus den Gln. 2.45 und 2.46 eliminiert.

Wie die Gln. 2.41 bis 2.47 zeigen, ist es gelungen, die  $NTU$ -Werte und Wärmekapazitätsstromverhältnisse für die Optimumsuche als Funktionen einer einzigen unabhängigen Veränderlichen  $Re_{2I}$  auszudrücken. Nach Gleichung 2.4 ist damit auch die dimensionslose Temperaturänderung des Hauptstroms I eine Funktion einer einzigen unabhängigen Veränderlichen:

$$P_{1I} = P_{1I}(Re_{2I}). \quad (2.48)$$

Für diese Funktion ist das absolute Maximum zu ermitteln. Dieser allgemeine Fall wird anhand von Beispielen in Abschnitt 2.4 behandelt.

Für zwei Sonderfälle vereinfacht sich die Optimumsuche. Nach Gl. 2.41 gehen die  $NTU$ -Werte gegen unendlich, wenn die Wärmedurchgangswiderstände oder die Wärmekapazitätsströme gegen null gehen. Dann nehmen die dimensionslosen Temperaturänderungen  $\epsilon_{1I}$  und  $\epsilon_{1II}$  Grenzwerte an.  $P_{1I}$  ist bereits eine Funktion einer einzigen unabhängigen  $R_{2,1I}$ ; die Reynolds-Zahl  $Re_{2I}$  braucht nicht eingeführt zu werden. Es ist dann das absolute Maximum der Funktion

$$P_{1I} = P_{1I}(R_{2,1I}) \quad (2.49)$$

zu bestimmen. Dieser Fall ist in Abschnitt 2.2 dargestellt.

Wenn der Wärmeübergangswiderstand auf der Seite des umlaufenden Fluids sehr klein ist und gegenüber den anderen thermischen Widerständen vernachlässigt werden kann, sind die  $NTU$ -Werte nach Gl. 2.41 Konstanten. Dann ist die dimensionslose Temperaturänderung des warmen Hauptstroms  $P_{1I}$  nach Gl. 2.4 – wie im Fall unendlich hoher  $NTU$ -Werte – bereits eine Funktion einer einzigen Veränderlichen  $R_{2,1I}$ , ohne daß die Reynolds-Zahl  $Re_{2I}$  eingeführt werden muß. Es ist das absolute Maximum der Funktion

$$P_{1I} = P_{1I}(R_{2,1I}) \quad (2.50)$$

zu bestimmen. Dieser Fall ist in Abschnitt 2.3 dargestellt.

## 2.1 Durchführung der Extremwertrechnung

Für die Funktion

$$P_{1I} = P_{1I}(R_{2,1I}) \quad \text{mit} \quad 0 < R_{2,1I} \quad (2.51)$$

soll das absolute Maximum bestimmt werden. Zunächst werden die kritischen Punkte mit

$$\frac{dP_{1I}}{dR_{2,1I}} = 0 \quad (2.52)$$

bestimmt [20]. Wenn ein relatives Maximum vorliegt, gilt für die kritischen Punkte

$$\frac{d^2 P_{1I}}{dR_{2,1I}^2} < 0. \quad (2.53)$$

Für die Funktion

$$P_{1I} = P_{1I}(Re_{2I}) \quad (2.54)$$

sieht die Extremwertrechnung entsprechend aus. Man sucht Punkte mit

$$\frac{dP_{1I}}{dRe_{2I}} = 0 \quad (2.55)$$

und

$$\frac{d^2 P_{1I}}{dRe_{2I}^2} < 0. \quad (2.56)$$

Allerdings ist die Funktion  $P_{1I}(Re_{2I})$  aufgrund des laminar turbulenten Strömungsumschlags des umlaufenden Fluids nicht im ganzen Intervall  $0 < Re_{2I}$  differenzierbar, so daß die Extremwertrechnung für die verschiedenen Teilbereiche, in denen die Funktion differenzierbar ist, getrennt durchgeführt werden muß. Anschließend wird aus den



gefundenen relativen Maxima und den Werten an den Punkten, an denen ein laminar-turbulenter Umschlag erfolgt, das absolute Maximum bestimmt, indem die Zahlenwerte verglichen werden.

## 2.2 Unendlich große $NTU$ -Werte

Es wird der Fall betrachtet, daß der Wärmedurchgangswiderstand nach Gl. 2.32 sehr klein ist. Im Grenzfall gehen die  $NTU$ -Werte nach Gl. 2.31 dann gegen unendlich. Für die vier verschiedenen Stromführungen nehmen die dimensionslosen Temperaturänderungen  $\epsilon_{1I}$  und  $\epsilon_{1II}$  Grenzwerte an, die durch die Gln. 2.8, 2.10, 2.12, 2.14, 2.17, 2.18, 2.21, 2.22, 2.24, 2.25, 2.27 und 2.28 gegeben sind.

Die Grenzwerte werden in Gl. 2.3 eingesetzt, so daß die dimensionslose Temperaturänderung des warmen Hauptstroms  $P_{1I}$  berechnet werden kann. Für die Optimumsuche besitzt  $P_{1I}$  nur noch das Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,1I}$  als unabhängige Veränderliche:

$$\frac{1}{P_{1I}} = \frac{1}{\epsilon_{1I}(R_{2,1I})} + \frac{R_{1I,1II}}{\epsilon_{1II}(R_{1I,1II}R_{2,1I})} - \frac{1}{R_{2,1I}}. \quad (2.57)$$

### 2.2.1 Kreuzstrom mit quervermischem Umlaufstrom

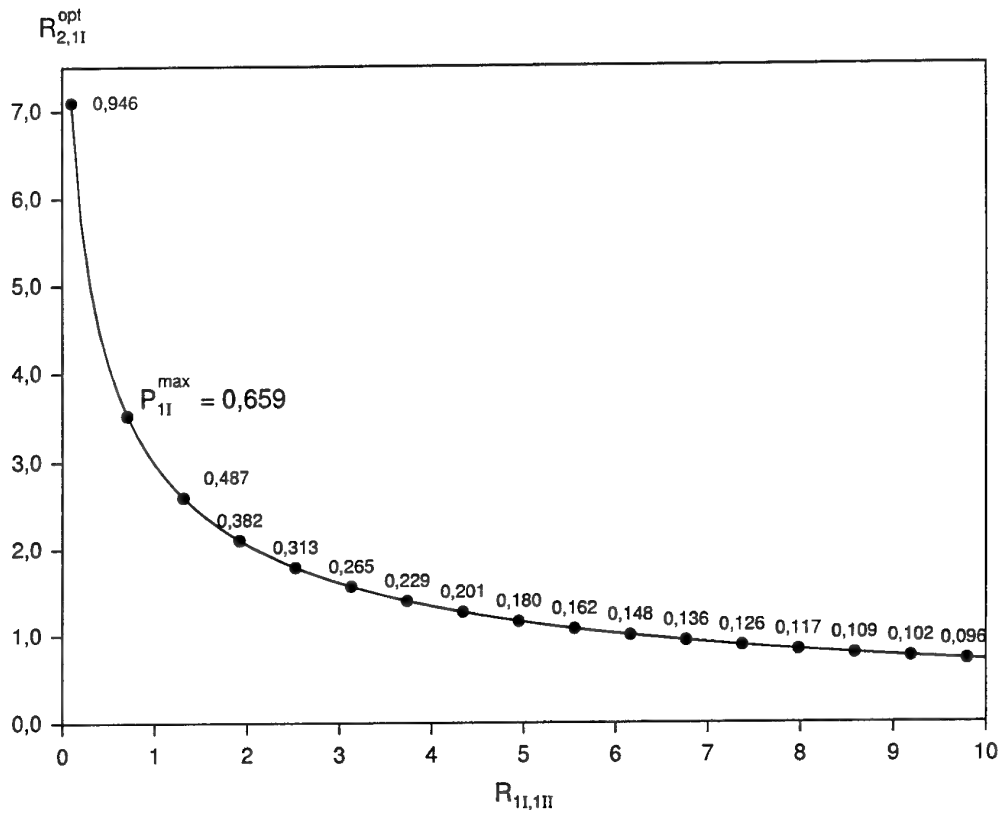
Nachdem die Gln. 2.8 und 2.10 in Gl. 2.3 eingesetzt worden sind, zeigt die Extremrechnung, daß das optimale Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,1I}^{opt}$  unendlich groß ist. In der Praxis wird dieser Wert durch die verfügbare Pumpleistung begrenzt. Die maximal erreichbare dimensionslose Temperaturänderung beträgt

$$P_{1I}^{max} = \frac{1}{1 + R_{1I,1II}}. \quad (2.58)$$

### 2.2.2 Kreuzstrom mit quervermischten Hauptströmen

Nachdem die Gln. 2.12 und 2.14 in Gl. 2.3 eingesetzt worden sind, zeigt die Extremwertrechnung, daß ein endlicher Wert für das optimale Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,1I}^{opt}$  existiert. Er ist implizit gegeben durch

$$\frac{\exp(-R_{2,1I}^{opt})}{[1 - \exp(-R_{2,1I}^{opt})]^2} + \frac{R_{1I,1II}^2 \exp(-R_{1I,1II}R_{2,1I}^{opt})}{[1 - \exp(-R_{1I,1II}R_{2,1I}^{opt})]^2} - \frac{1}{R_{2,1I}^{opt2}} = 0 \quad (2.59)$$



**Abb. 2.3.** Wert des optimalen Wärmekapazitätsstromverhältnisses  $R_{2,1I}^{opt}$  in Abhängigkeit vom vorgegebenen Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{1I,1II}$  für zwei gekoppelte Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit quervermischten Hauptströmen. Die  $NTU$ -Werte der Einzelapparate sind unendlich groß. An die Kurve ist für einige Punkte der Zahlenwert der maximalen dimensionslosen Temperaturänderung  $P_{1I}^{max}$  eingetragen.

und wird numerisch mit dem Newton-Verfahren bestimmt [20]. In Abb. 2.3 ist das optimale Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,1I}^{opt}$  in Abhängigkeit vom vorgegebenen Wärmekapazitätsstromverhältnis der beiden Hauptströme  $R_{1I,1II}$  aufgetragen.

Wenn die Wärmekapazitätsströme der beiden Hauptströme gleich groß sind, beträgt das optimale Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,1I}^{opt} = 2,983$ . Dabei wird eine dimensionslose Temperaturänderung von  $P_{1I}^{max} = 0,565$  erreicht.

### 2.2.3 Reiner Kreuzstrom und Gegenstrom

Dieser Fall ist von Martin [10] behandelt worden. Die Ergebnisse gelten auch für Gegenstromkaskaden mit unendlich großen  $NTU$ -Werten [10].

Reiner Kreuzstrom und Gegenstrom haben für unendliche große  $NTU$ -Werte die gleichen Grenzwerte  $\epsilon_{1I}$  und  $\epsilon_{1II}$ , vgl. Gln. 2.17 und 2.24, 2.18 und 2.25, 2.21 und 2.27 bzw. 2.22 und 2.28. Diese Gleichungen werden verwendet, um die dimensionslose Temperaturänderung des Hauptstroms I in Abhängigkeit vom Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,1I}$  auszudrücken. Dabei müssen drei Fälle unterschieden werden:

1. Der Wärmekapazitätsstrom des warmen Hauptstroms ist größer als der des kalten Hauptstroms ( $R_{1I,1II} > 1$ ). Dann gilt

$$P_{1I} = R_{2,1I}, \quad 0 < R_{2,1I} \leq \frac{1}{R_{1I,1II}} \quad (2.60)$$

$$P_{1I} = \frac{1}{R_{1I,1II}}, \quad \frac{1}{R_{1I,1II}} \leq R_{2,1I} \leq 1 \quad (2.61)$$

$$P_{1I} = \frac{R_{2,1I}}{R_{2,1I} + R_{1I,1II}R_{2,1I} - 1}, \quad 1 \leq R_{2,1I}. \quad (2.62)$$

2. Der Wärmekapazitätsstrom des warmen Hauptstroms ist genauso groß wie der des kalten Hauptstroms ( $R_{1I,1II} = 1$ ). Dann gilt

$$P_{1I} = R_{2,1I}, \quad 0 < R_{2,1I} \leq 1 \quad (2.63)$$

$$P_{1I} = \frac{R_{2,1I}}{2R_{2,1I} - 1}, \quad 1 \leq R_{2,1I}. \quad (2.64)$$

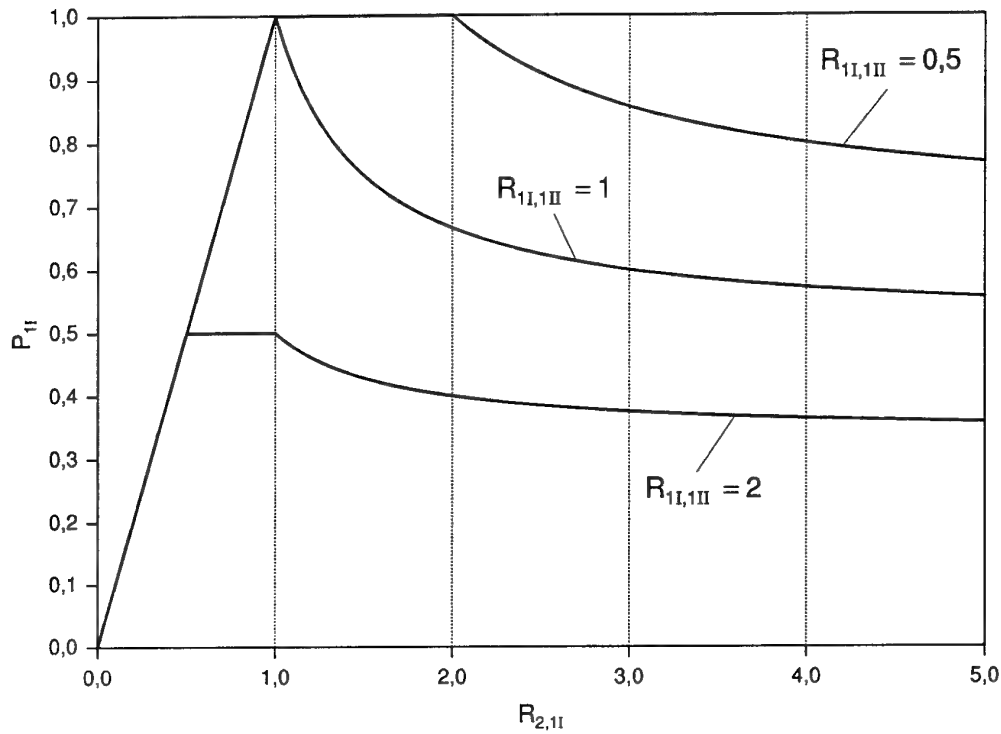
3. Der Wärmekapazitätsstrom des warmen Hauptstroms ist kleiner als der des kalten Hauptstroms ( $R_{1I,1II} < 1$ ). Dann gilt

$$P_{1I} = R_{2,1I}, \quad 0 < R_{2,1I} \leq 1 \quad (2.65)$$

$$P_{1I} = 1, \quad 1 \leq R_{2,1I} \leq \frac{1}{R_{1I,1II}} \quad (2.66)$$

$$P_{1I} = \frac{R_{2,1I}}{R_{2,1I} + R_{1I,1II}R_{2,1I} - 1}, \quad \frac{1}{R_{1I,1II}} \leq R_{2,1I}. \quad (2.67)$$

In Abb. 2.4 sind für drei verschiedene Wärmekapazitätsstromverhältnisse  $R_{1I,1II}$  die dimensionslosen Temperaturänderungen des warmen Hauptstroms in Abhängigkeit vom eingestellten Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,1I}$  aufgetragen.



**Abb. 2.4.** Wert der dimensionslosen Temperaturänderung des warmen Hauptstroms  $P_{II}$  in Abhängigkeit vom eingestellten Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,II}$  für zwei gekoppelte Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit reinem Kreuzstrom oder zwei gekoppelte Gegenstrom-Wärmeübertrager mit unendlich großen  $NTU$ -Werten. Es sind drei verschiedene Wärmekapazitätsstromverhältnisse  $R_{1I,1II}$  vorgegeben, und zwar  $R_{1I,1II} = 0,5$ ,  $R_{1I,1II} = 1$  und  $R_{1I,1II} = 2$ . Für  $R_{1I,1II} \neq 1$  ist nicht ein einzelner Umlaufstrom optimal, sondern für den Umlaufstrom liegt ein optimaler Bereich vor.

Aus den Gln. 2.60 bis 2.67 und Abb. 2.4 wird ohne Extremwertrechnung die Lage des optimalen Wärmekapazitätsstromverhältnisses  $R_{2,1I}$  deutlich. Auch hier werden drei Fälle unterschieden:

1.  $R_{1I,1II} > 1$ : Optimal ist nicht ein einzelner Wert für  $R_{2,1I}^{opt}$ , sondern für das gesamte Intervall

$$\frac{1}{R_{1I,1II}} \leq R_{2,1I}^{opt} \leq 1 \quad (2.68)$$

wird die größtmögliche dimensionslose Temperaturänderung

$$P_{1I}^{max} = \frac{1}{R_{1I,1II}} \quad (2.69)$$

erreicht.

2.  $R_{1I,1II} = 1$ : Das Optimum liegt bei ( $R_{2,1I}^{opt} = 1, P_{1I}^{max} = 1$ ). Wie Abb. 2.4 zeigt, fällt der Wert von  $P_{1I}$  rechts und links des Optimums steil ab. Hier ist also Vorsicht geboten, wenn der Umlaufstrom nicht präzise eingestellt werden kann. Kleine Schwankungen des umlaufenden Fluids mindern die Temperaturänderungen der Hauptströme beträchtlich.

3.  $R_{1I,1II} < 1$ : Für das gesamte Intervall

$$1 \leq R_{2,1I}^{opt} \leq \frac{1}{R_{1I,1II}} \quad (2.70)$$

wird die größtmögliche dimensionslose Temperaturänderung

$$P_{1I}^{max} = 1 \quad (2.71)$$

erreicht.

Die Gln. 2.68 und 2.70 besagen, daß der optimale Wärmekapazitätsstrom des umlaufenden Fluids  $\dot{W}_2$  zwischen den Wärmekapazitätsströmen der Hauptströme  $\dot{W}_{1I}$  und  $\dot{W}_{1II}$  liegt [10].

## 2.3 Konstante $NTU$ -Werte

Die  $NTU$ -Werte können für die Optimumsuche als Konstanten behandelt werden, wenn der Wärmeübergangswiderstand auf der Seite der umlaufenden Flüssigkeit sehr viel kleiner ist als die beiden anderen thermischen Widerstände in Gl. 2.32. In diesem Fall wirken sich auch starke Änderungen des Wärmeübergangswiderstands auf der Seite des Umlaufstroms nicht wirklich aus.

### 2.3.1 Kreuzstrom mit quervermischem Umlaufstrom

Einsetzen von Gl. 2.7 und Gl. 2.9 in Gl. 2.3 liefert die Berechnungsgleichung für  $P_{1I}$  in Abhängigkeit von  $R_{2,1I}$ . Die Extremwertrechnung zeigt, daß das optimale Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,1I}^{opt}$  unendlich groß ist. Die erreichbare dimensionslose Temperaturänderung des warmen Hauptstroms  $P_{1I}$  beträgt

$$P_{1I}^{max}(R_{2,1I} \rightarrow \infty) = \left[ \frac{1}{1 - \exp(-NTU_{1I})} + \frac{R_{1I,1II}}{1 - \exp(-NTU_{1II})} \right]^{-1}. \quad (2.72)$$

Mit Gl. 2.72 kann für alle Stromführungen die dimensionslose Temperaturänderung des warmen Hauptstroms  $P_{1I}$  berechnet werden, wenn der Umlaufstrom unendlich groß ist.

### 2.3.2 Gegenstrom

Für zwei gekoppelte Gegenstrom-Wärmeübertrager hat Roetzel [11] eine explizite Formel für den optimalen Umlaufstrom hergeleitet:

$$R_{2,1I}^{opt} = \frac{NTU_{1I} + \frac{1}{R_{1I,1II}} NTU_{1II}}{NTU_{1I} + NTU_{1II}}. \quad (2.73)$$

Roetzel [11] ermittelt den optimalen Umlaufstrom, indem er das gekoppelte System aus zwei Gegenstrom-Wärmeübertragern mit einem einzelnen hypothetischen Gegenstrom-Wärmeübertrager vergleicht.

Der Wärmekapazitätsstrom des umlaufenden Fluids  $\dot{W}_2$  wird so gewählt, daß die Summe der logarithmischen mittleren Temperaturdifferenzen der beiden Einzelapparate mit der logarithmischen mittleren Temperaturdifferenz des hypothetischen Gegenstrom-Wärmeübertragers übereinstimmt. Nur in diesem Sonderfall erreicht die Summe der logarithmischen mittleren Temperaturdifferenzen der beiden Einzelapparate den Maximalwert, und  $\dot{W}_2$  ist der gesuchte optimale Wärmekapazitätsstrom [11].

In der vorliegenden Arbeit wurde die Lösung von Roetzel durch die Extremwertrechnung nach Abschnitt 2.1 bestätigt.

Bei der Angabe der größtmöglichen dimensionslosen Temperaturänderungen des warmen Hauptstroms  $P_{1I}^{max}$  ist eine Fallunterscheidung notwendig:

Für  $R_{1I,1II} \neq 1$  gilt

$$P_{1I}^{max} = \frac{1 - \exp \left[ (R_{1I,1II} - 1) \frac{NTU_{1I} NTU_{1II}}{R_{1I,1II} NTU_{1I} + NTU_{1II}} \right]}{1 - R_{1I,1II} \exp \left[ (R_{1I,1II} - 1) \frac{NTU_{1I} NTU_{1II}}{R_{1I,1II} NTU_{1I} + NTU_{1II}} \right]}. \quad (2.74)$$

Für  $R_{1I,1II} = 1$  gilt

$$P_{1I}^{max} = \frac{NTU_{1I} NTU_{1II}}{NTU_{1I} + NTU_{1II} + NTU_{1I} NTU_{1II}}. \quad (2.75)$$

In Abb. 2.5 ist die Existenz eines Optimums anhand von Temperaturprofilen in zwei gekoppelten Gegenstrom-Wärmeübertragern veranschaulicht. Die Berechnungsgleichungen für die Temperaturprofile sind in Anh. A angegeben.

Die Temperaturprofile sind für den Fall dargestellt, daß zwei identische Gegenstrom-Wärmeübertrager zusammengeschaltet sind und mit gleich großen Wärmekapazitätsströmen der Hauptströme betrieben werden.

Die Wärmekapazitätsströme der Hauptströme, die  $NTU$ -Werte und die dimensionslosen Temperaturänderungen der Hauptströme sind für beide Apparate gleich groß und tragen daher keinen Index.

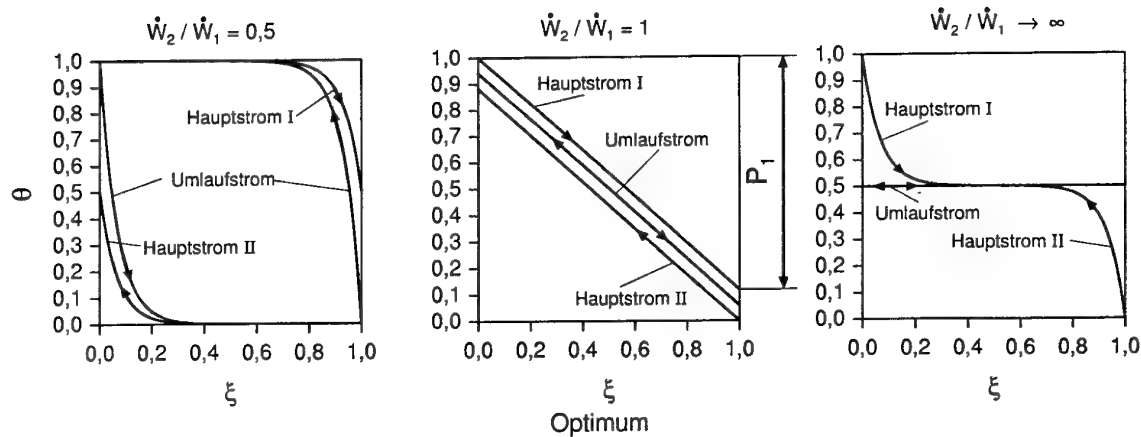
Auf der Ordinate ist die dimensionslose Temperatur

$$\theta = \frac{T - T_{1,einI}}{T_{1,einI} - T_{1,einII}} \quad (2.76)$$

abgetragen und auf der Abszisse die Ortskoordinate  $\xi$ , die mit der Länge der Wärmeübertrager so normiert ist, daß ihr Wert zwischen 0 und 1 liegt.

Der Hauptstrom I tritt bei  $\xi = 0$  mit der dimensionslosen Temperatur  $\theta_{1,einI} = 1$  in den Wärmeübertrager I ein und kühlt sich ab, Abb. 2.5. Im Gegenstrom erwärmt sich das umlaufende Fluid, das bei  $\xi = 1$  in den Wärmeübertrager I eintritt. Der Hauptstrom II tritt bei  $\xi = 0$  mit der dimensionslosen Temperatur  $\theta_{1,einII} = 0$  in den Wärmeübertrager II ein und erwärmt sich. Im Gegenstrom kühlt sich das umlaufende Fluid ab.

Im Grenzfall des unendlich großen Umlaufstroms wird eine dimensionslose Temperaturänderung der Hauptströme von 0,5 erreicht, Abb. 2.5 rechts. Erst wenn der Umlaufstrom verkleinert wird, können sich dimensionslose Temperaturänderungen der Hauptströme einstellen, die größer als 0,5 sind. Bei einem Wärmekapazitätsstromverhältnis  $\dot{W}_2/\dot{W}_1 = 1$  sind die Temperaturprofile parallele Geraden. Hier liegt das Optimum,



**Abb. 2.5.** Veranschaulichung der Existenz eines optimalen Umlaufstroms für zwei gekoppelte Gegenstrom-Wärmeübertrager mit konstanten  $NTU$ -Werten anhand von Temperaturprofilen in den Apparaten. Es sind zwei identische Gegenstrom-Wärmeübertrager zusammengeschaltet, die mit gleich großen Wärmekapazitätsströmen der Hauptströme betrieben werden. Der  $NTU$ -Wert beträgt  $NTU_1 = 15$ .

Abb. 2.5 Mitte. Wird der Umlaufstrom weiter verkleinert, so verkleinern sich auch wieder die dimensionslosen Temperaturänderungen der Hauptströme, Abb. 2.5 links.

### 2.3.3 Kreuzstrom mit quervermischten Hauptströmen und reiner Kreuzstrom

Einsetzen von Gl. 2.11 und Gl. 2.13 in Gl. 2.3 liefert die Berechnungsgleichung für  $P_{1I}$  in Abhängigkeit von  $R_{2,1I}$  für den Kreuzstrom mit quervermischten Hauptströmen, und Einsetzen von Gl. 2.23 und Gl. 2.26 in Gl. 2.3 liefert die Berechnungsgleichung für den reinen Kreuzstrom.

Bei der Extremwertrechnung entstehen umfangreiche algebraische Ausdrücke, die mit der Computeralgebra bewältigt werden. Diese Ausdrücke werden numerisch gelöst. In der vorliegenden Arbeit wurde das Programmpaket Maple verwendet, das sowohl Computeralgebra als auch numerische Lösungsverfahren bereitstellt [22].

In den Beispielen in Abschnitt 2.4 wird der Fall behandelt, daß zwei identische Wärmeübertrager zusammengeschaltet sind und mit gleich großen Wärmekapazitätsströmen



der Hauptströme betrieben werden. Dann läßt sich das Optimum auch grafisch ermitteln.

## 2.4 Beispiele

Für zwei gekoppelte Rippenrohrwärmeübertrager mit einem Durchgang und vierundzwanzig Rohrreihen, die bei Kays und London [12] als Einzelapparate beschrieben sind, wird die Optimierung des Umlaufstroms durchgeführt. In den Einzelapparaten strömt Wasser durch die Rohre, und Luft strömt die berippten Rohre quer an, so daß reiner Kreuzstrom vorliegt.

Die mittleren Wärmeübergangskoeffizienten auf der Wasserseite im turbulenten Strömungsbereich werden mit der Gnielinski-Gleichung [1] berechnet:

$$Nu_{2M} = \frac{\zeta_{Gn}/8(Re_{2M} - 1000)Pr_2}{1 + 12,7\sqrt{\zeta_{Gn}/8(Pr_2^{\frac{2}{3}} - 1)}} \quad (2.77)$$

$$\zeta_{Gn} = (1,82 \log_{10} Re_{2M} - 1,64)^{-2}, \quad 2300 < Re_{2M} < 10^6. \quad (2.78)$$

Für den laminaren Strömungsbereich ist eine genaue Berücksichtigung der thermischen Randbedingungen notwendig [19]. Um die Berechnungen zu vereinfachen, wird angenommen, daß die Nußelt-Zahl für eine ausgebildete laminare Rohrströmung mit konstanter Wärmestromdichte an der Rohrwand verwendet werden kann. Diese Nußelt-Zahl ist konstant und hat den Wert 4,36.

In den Beispielen sind zwei identische Apparate zusammengeschaltet, und die Wärmekapazitätsströme der beiden Hauptströme sind gleich groß.

Da zwei identische Apparate zusammengeschaltet sind, können bei den Parametern, die für die Optimumsuche benötigt werden, die Indizes, die den Einzelapparat kennzeichnen, fortgelassen werden.

Mit den Daten, die von Kays und London für den Rippenrohrwärmeübertrager angegeben sind, werden die Gln. 2.42, 2.45 und 2.46 ausgewertet. Das Ergebnis lautet

$$N_{1I} = N_{1II} = N_1 = 2,965 \quad (2.79)$$

$$N_{2I} = N_{2II} = N_2 = 244,0 \frac{Nu_2(Re_2, Pr_2 = 7,01)}{Re_2} \quad (2.80)$$

$$R_{2,1I} = R_{2,1II} = R_{2,1} = 1,735 \cdot 10^{-3} Re_2. \quad (2.81)$$

Die dimensionslosen Temperaturänderungen der beiden Hauptströme sind gleich groß:

$$P_{II} = P_{III} = P_1(Re_2). \quad (2.82)$$

Damit kann die Extremwertrechnung nach Abschnitt 2.1 durchgeführt werden.

Für den hier vorliegenden Fall, daß zwei gleiche Apparate mit gleich großen Hauptströmen betrieben werden, wird die Extremwertrechnung durch eine grafische Methode veranschaulicht und bestätigt. Die Gln. 2.3 und 2.4 lauten für den vorliegenden Sonderfall

$$\frac{1}{P_1} = \frac{2}{\epsilon_1(NTU_1, R_{2,1})} - \frac{1}{R_{2,1}} \quad (2.83)$$

bzw.

$$P_1 = P_1(NTU_1, R_{2,1}). \quad (2.84)$$

Die genaue Gestalt der Funktion 2.84 hängt von der Stromführung ab. Ist die Stromführung festgelegt, so läßt sich der funktionale Zusammenhang 2.84 als Fläche im dreidimensionalen Raum darstellen. Um Zahlenwerte ablesen zu können, ist jedoch ein zweidimensionales Höhenlinienbild besser geeignet. In Abb. 2.6 ist ein solches Höhenlinienbild für zwei gekoppelte Wärmeübertrager mit reinem Kreuzstrom dargestellt. Auf der Abszisse ist das Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,1}$  abgetragen und auf der Ordinate der  $NTU$ -Wert. Ferner sind Linien konstanter dimensionsloser Temperaturänderung der Hauptströme  $P_1 = \text{const}$  als Höhenlinien eingezeichnet. Es gibt zwei Arten von Höhenlinien. Wenn die dimensionslose Temperaturänderung größer als 0,5 ist, besitzen die Höhenlinien zwei senkrechte Asymptoten. Wenn die dimensionslose Temperaturänderung kleiner als 0,5 ist, besitzen die Höhenlinien nur eine senkrechte Asymptote.

Damit sind die Grundlagen für die grafische Optimumsuche bei konstantem  $NTU$ -Wert bereitgestellt. Es wird im Höhenlinienbild auf waagerechten Linien mit  $NTU_1 = \text{const}$  nach dem Schnittpunkt mit der Höhenlinie mit dem größtmöglichen Wert von  $P_1$  gesucht. Als Beispiel wird der Fall betrachtet, daß ein konstanter  $NTU$ -Wert von 12 für beide Kreuzstrom-Wärmeübertrager bekannt ist, Abb. 2.6: Beginnend beim Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,1} = 0$  steigt die dimensionslose Temperaturänderung rasch an, bei  $R_{2,1} = 1,09$  wird die Höhenlinie mit  $P_1 = 0,722$  tangiert. Hier liegt das Optimum. Anschließend fällt die dimensionslose Temperaturänderung gegen den Grenzwert

$$P_1(R_{2,1} \rightarrow \infty) = \frac{1 - \exp(-12)}{2} \approx 0,5 \quad (2.85)$$



ab, der durch Gl. 2.72 gegeben ist.

Im Fall der Rippenrohrwärmeübertrager ist der  $NTU$ -Wert nicht konstant. Das Optimum kann nicht auf einer waagerechten Linie gesucht werden, sondern nur auf einer Kurve, die den Zusammenhang zwischen  $NTU$ -Wert und Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,1}$  richtig wiedergibt, Abb. 2.6. Diese Kurve wird Betriebscharakteristik genannt und besitzt eine Unstetigkeit beim laminar-turbulenten Strömungsumschlag. Der  $NTU$ -Wert ändert sich erheblich von 1,14 auf 2,58, wenn  $R_{2,1}$  von 0 bis 10 gesteigert wird. Im Bereich  $0 < R_{2,1} \leq 10$  liegt der größte Wert von  $P_{1f}$  am Rand des Intervalls bei  $R_{2,1} = 10$ .

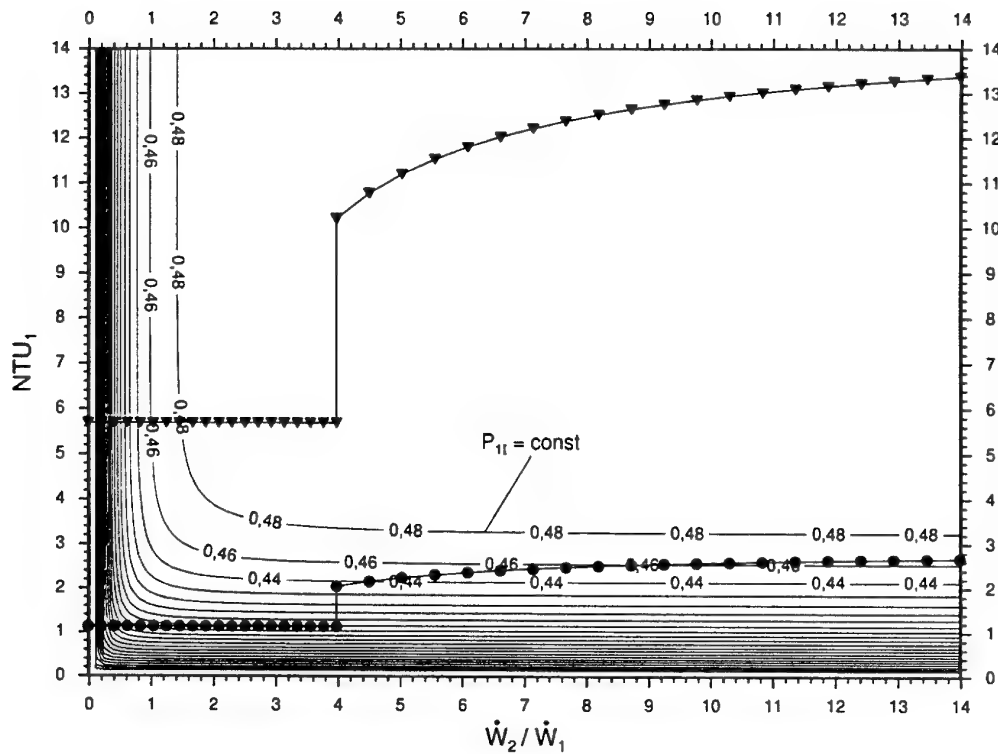
Die Einzelapparate sind von Kays und London für ein Wärmekapazitätsstromverhältnis von  $R_{2,1} = 8,20$  ausgelegt worden. Dieser Wert ist auch für die Kopplung sinnvoll, da dieser Arbeitspunkt im turbulenten Bereich mit hohen dimensionslosen Temperaturänderungen  $P_1 = 0,468$  liegt und Schwankungen des Umlaufstroms kaum Auswirkungen auf die Austrittstemperaturen der Hauptströme haben.

Andere Verhältnisse liegen vor, wenn die Einzelapparate sehr große wärmeübertragende Flächen besitzen. Dazu werden die Rippenrohrwärmeübertrager nach Kays und London betrachtet. Durch eine gedachte Vergrößerung ihrer wärmeübertragenden Flächen werden die  $NTU$ -Werte um den Faktor 5 vergrößert. Diese fiktive Betriebscharakteristik ist in Abb. 2.6 eingetragen. Es liegt ein absolutes Maximum von  $P_1$  bei einem Wärmekapazitätsstromverhältnis von  $R_{2,1} = 1,13$  vor.

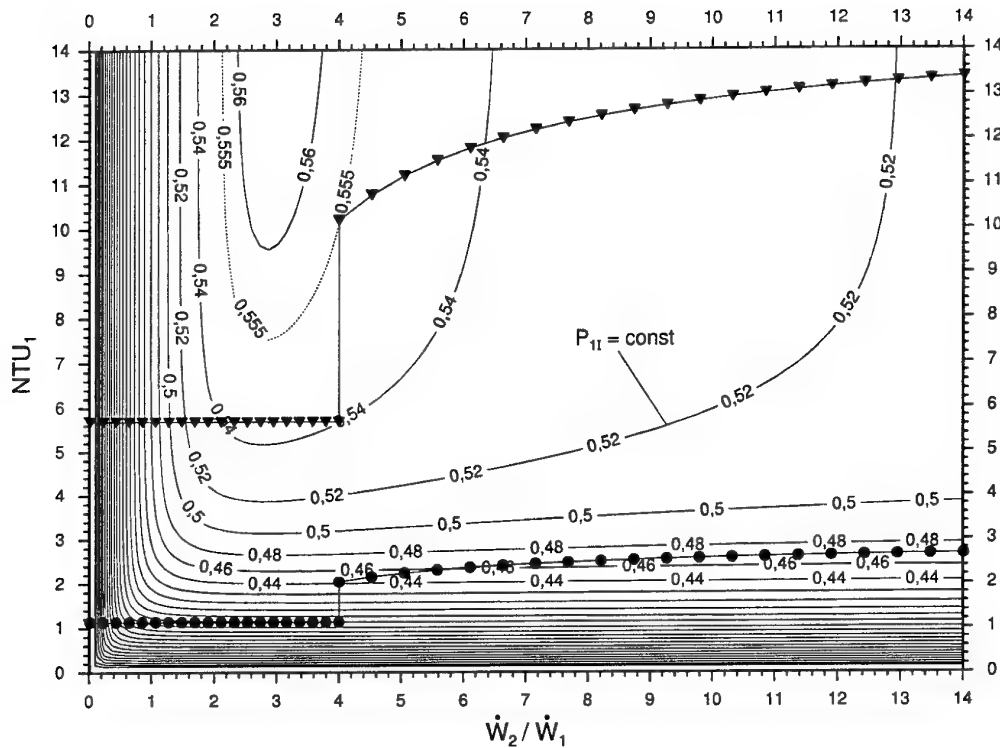
Da die Höhenlinienbilder sehr anschaulich sind, werden sie auch für die anderen drei Stromführungen angegeben. Um das Optimum zu bestimmen, sind die Betriebscharakteristiken  $NTU_1 = NTU_1(\dot{W}_2/\dot{W}_1)$  aus Abb. 2.6 in die Höhenlinienbilder der anderen Stromführungen eingetragen worden. Es wird angenommen, daß sich die Betriebscharakteristiken aus Abb. 2.6 auch für die anderen Stromführungen realisieren lassen.

Beim Kreuzstrom mit quervermischem Umlaufstrom, Abb. 2.7, fallen alle Höhenlinien mit wachsendem Wärmekapazitätsstromverhältnis streng monoton, während die Betriebscharakteristiken mit wachsendem Wärmekapazitätsstromverhältnis konstant bleiben oder ansteigen. Der optimale Umlaufstrom hat immer den Wert unendlich.

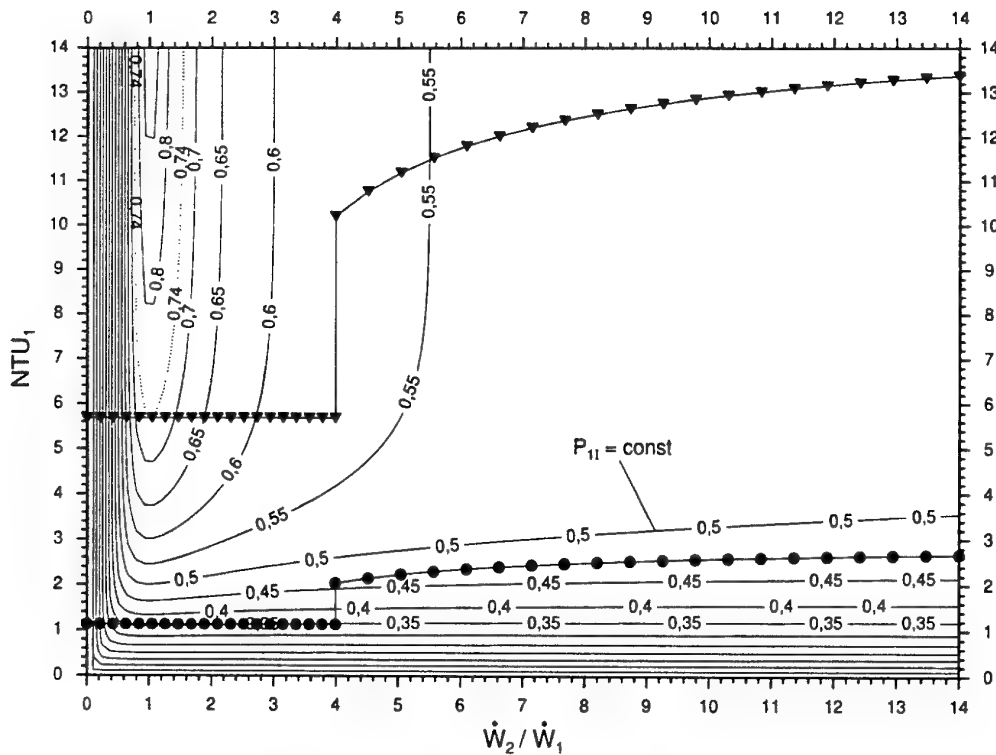
Beim Kreuzstrom mit quervermischten Hauptströmen, Abb. 2.8, liegt im Fall kleiner resultierender  $NTU$ -Werte der größte Wert von  $P_{1f}$  im betrachteten Intervall  $0 < R_{2,1} < 14$  am Rand dieses Intervalls bei  $R_{2,1} = 14$ .



**Abb. 2.7.** Höhenlinienbild für zwei gekoppelte Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit quervermischem Umlaufstrom: Die durchgezogenen Linien mit Zahlenbeschriftung sind Linien konstanter dimensionsloser Temperaturänderung  $P_{II}$  (Höhenlinien). Die Betriebscharakteristik mit kleinen resultierenden  $NTU$ -Werten ist durch ausgefüllte Kreise gekennzeichnet. Die Betriebscharakteristik mit großen resultierenden  $NTU$ -Werten ist durch ausgefüllte Dreiecke gekennzeichnet.



**Abb. 2.8.** Höhenlinienbild für zwei gekoppelte Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit quervermischten Hauptströmen: Die durchgezogenen Linien mit Zahlenbeschriftung sind Linien konstanter dimensionsloser Temperaturänderung  $P_{1I}$  (Höhenlinien). Die Betriebscharakteristik mit kleinen resultierenden  $NTU$ -Werten ist durch ausgefüllte Kreise gekennzeichnet. Die Betriebscharakteristik für große resultierende  $NTU$ -Werte ist durch ausgefüllte Dreiecke gekennzeichnet. Die Höhenlinie mit dem Wert  $P_{1I}$  des Optimums ist punktiert eingezeichnet.



**Abb. 2.9.** Höhenlinienbild für zwei gekoppelte Gegenstrom-Wärmeübertrager: Die durchgezogenen Linien mit Zahlenbeschriftung sind Linien konstanter dimensionsloser Temperaturänderung  $P_{11}$  (Höhenlinien). Die Betriebscharakteristik mit kleinen resultierenden  $NTU$ -Werten ist durch ausgefüllte Kreise gekennzeichnet. Die Betriebscharakteristik mit großen resultierenden  $NTU$ -Werten ist durch ausgefüllte Dreiecke gekennzeichnet.

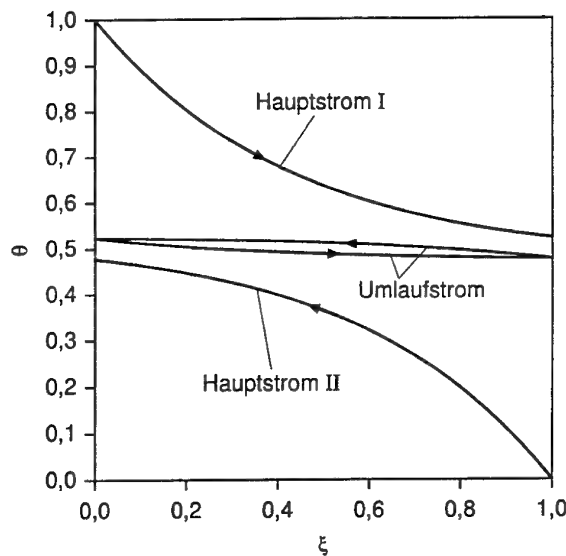
Für große resultierende  $NTU$ -Werte liegt ein absolutes Maximum vor. Die Lage dieses Maximums ist besonders interessant, da es genau an dem Punkt liegt, an dem der laminar-turbulente Strömungsumschlag erfolgt:

$$R_{2,1}^{opt} = 3,99 \quad (2.86)$$

$$P_1^{max} = 0,555. \quad (2.87)$$

Der Wechsel von der laminaren zur turbulenten Strömung findet in Wirklichkeit nicht an einem Punkt statt, sondern erstreckt sich über einen Bereich. Die Vorhersage der tatsächlichen Strömungsform am berechneten Optimum ist daher unsicher.

In Abb. 2.9 ist das Höhenlinienbild mit den Betriebscharakteristiken für zwei gekoppelte Gegenstrom-Wärmeübertrager dargestellt. Die Verhältnisse sind ähnlich wie beim



**Abb. 2.10.** Temperaturprofile für zwei gekoppelte Gegenstrom-Wärmeübertrager, für die die Größe des Umlaufstroms optimiert ist. Bei der Optimierung mußte berücksichtigt werden, daß der  $NTU$ -Wert von der Größe des Wärmekapazitätsstroms des umlaufenden Fluids abhängt. Es gilt die Betriebscharakteristik in Abb. 2.9, die durch ausgefüllte Kreise gekennzeichnet ist. Im Optimum gilt:  $R_{2,1}^{opt} = 10,2$ ,  $NTU_1 = 2,585$  und  $P_1^{max} = 0,477$ .

reinen Kreuzstrom. Allerdings gibt es hier für die Kurve mit kleinen resultierenden  $NTU$ -Werten ein schwach ausgeprägtes absolutes Maximum von  $P_1$  innerhalb des Intervalls  $0 < R_{2,1} < 14$ , und zwar bei  $R_{2,1}^{opt} = 10,2$  mit  $P_1^{max} = 0,477$ . In Abb. 2.10 sind die Temperaturprofile der Fluidströme für das Optimum dargestellt.

Für große resultierende  $NTU$ -Werte beträgt das optimale Wärmekapazitätsstromverhältnis  $R_{2,1}^{opt}$  exakt 1, Abb. 2.9. Die dimensionslose Temperaturänderung beträgt  $P_1^{max} = 0,740$ . Die Temperaturprofile der Fluidströme in den beiden Wärmeübertragern sehen qualitativ so aus wie in Abb. 2.5 Mitte. Die spitze Form der Höhenlinie im Minimum, Abb. 2.9, bedeutet, daß der optimale Wert von  $\dot{W}_2/\dot{W}_1$  nahezu unabhängig ist von der Betriebscharakteristik. Es gilt dann der optimale Umlaufstrom für konstante  $NTU$ -Werte nach Roetzel [11].



### 3 Vorgehensweise bei der Untersuchung des instationären Verhaltens

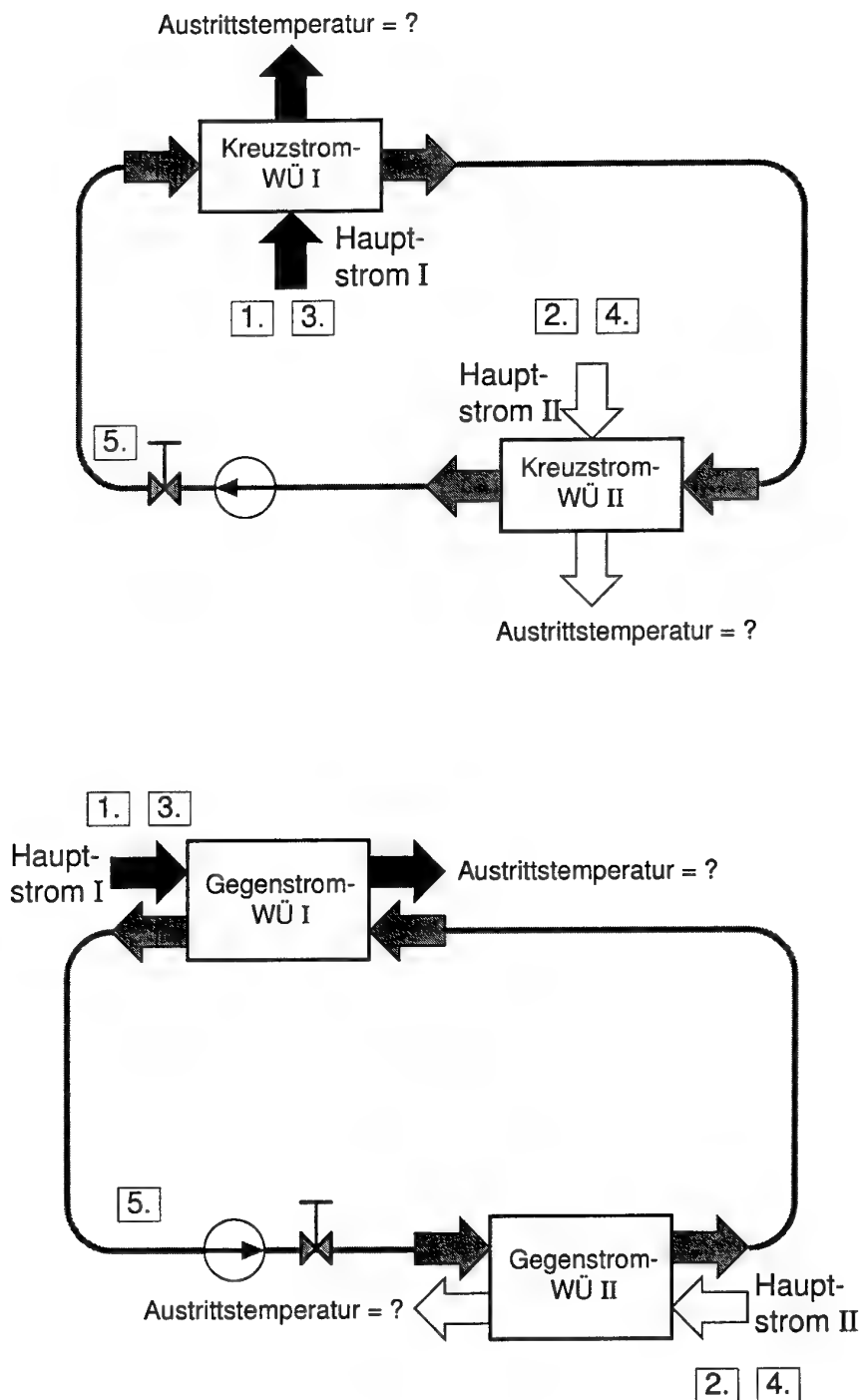
Für die Untersuchung des instationären Verhaltens werden drei Systeme ausgewählt, die sich durch die Stromführung in den Wärmeübertragern unterscheiden. Es handelt sich um zwei Schaltungen mit Kreuzstrom-Wärmeübertragern und eine Schaltung mit Gegenstrom-Wärmeübertragern, Abb. 3.1.

Das erste System besteht aus zwei zusammengeschalteten Kreuzstrom-Wärmeübertragern. Die Hauptströme sind unvermischt. Der Umlaufstrom ist quervermischt. Das zweite System besteht ebenfalls aus zwei zusammengeschalteten Kreuzstrom-Wärmeübertragern. Die Hauptströme sind quervermischt. Der Umlaufstrom ist innerhalb der Wärmeübertrager unvermischt und in den Verbindungsleitungen quervermischt. Das dritte System besteht aus zwei zusammengeschalteten Gegenstrom-Wärmeübertragern.

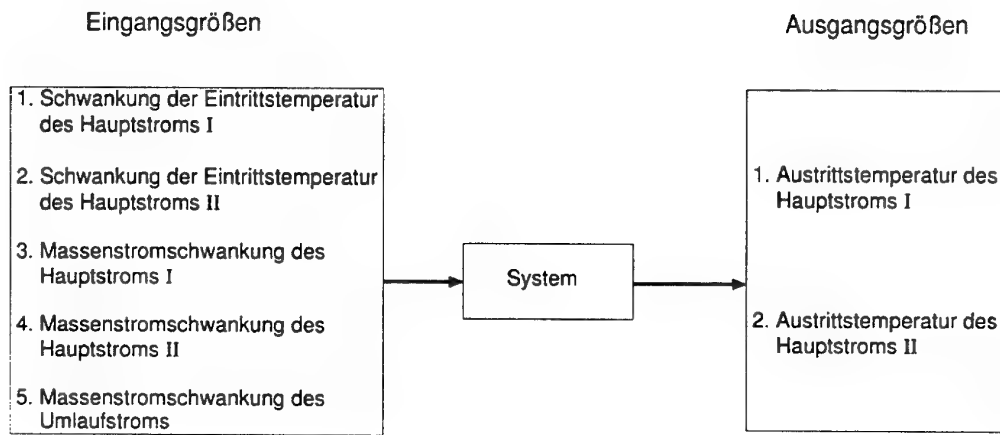
Jedes System besitzt fünf Eingangsgrößen, die sowohl einzeln als auch kombiniert auftreten können, und zwei Ausgangsgrößen, Abb. 3.2. Bei den Eingangsgrößen ist zu unterscheiden, ob sie vorgegeben werden, um die Ausgangsgrößen gezielt zu beeinflussen, oder ob sie unerwartet aufgrund äußerer, nicht genau bekannter Einflüsse auftreten. Im ersten Fall spricht man von Stellgrößen, im zweiten von Störgrößen [23].

Der Anfangszustand des Systems kann willkürlich vorgegeben werden. Hier wird der Fall behandelt, daß der Anfangszustand ein stationärer Betriebszustand ist. Für ihn wird festgelegt, daß der Hauptstrom I indirekt Wärme an den Hauptstrom II abgibt.

Um den zeitlichen Verlauf der Ausgangsgrößen in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen zu bestimmen, ist eine geeignete mathematische Beschreibung des Systems notwendig. Dabei spielt die Bilanzgleichung für die Erhaltungsgröße Energie eine wichtige Rolle. Die resultierenden partiellen Differentialgleichungen werden mit der Laplace-Transformation und dem Finite-Differenzen-Verfahren gelöst, so daß die Temperaturfelder im gesamten System zu jedem Zeitpunkt berechenbar sind. Anhand von Beispielen wird das dynamische Verhalten des Systems diskutiert.



**Abb. 3.1.** Systeme, für die das instationäre Verhalten untersucht wird. Oben: System aus zwei gekoppelten Kreuzstrom-Wärmeübertragern. Unten: System aus zwei gekoppelten Gegenstrom-Wärmeübertragern. Die Ziffern bezeichnen die fünf Eingangsgrößen des Systems und sind in Abb. 3.2 erklärt. Die beiden Ausgangsgrößen sind mit Fragezeichen versehen. Das Ziel ist, ihren zeitlichen Verlauf zu berechnen.



**Abb. 3.2.** Ein- und Ausgangsgrößen eines Systems, das aus zwei gekoppelten Wärmeübertragern mit umlaufendem Fluidstrom besteht.

## 4 Grundgleichungen

### 4.1 Gleichungen für die Temperaturfelder der strömenden Fluide

Um die Temperaturfelder der strömenden Fluide zu berechnen, müssen die Bilanzgleichungen für die Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Energie zusammen mit den Materialgleichungen gelöst werden [24]. Zu den Materialgleichungen gehören die thermische und die kalorische Zustandsgleichung, ein Gesetz für den Spannungszustand im Fluid – z.B. das Navier–Stokes Gesetz für die Spannung –, ein Gesetz für die Wärmeleitung – z.B. das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz – und Zustandsgleichungen für die Viskositäten und Wärmeleitfähigkeiten.

Aus diesen Gleichungen kann das Temperaturfeld nicht für sich allein berechnet werden. Es sind gleichzeitig das Dichtefeld, das Geschwindigkeitsfeld und das Temperaturfeld zu berechnen. Wenn alle Fluide, die am Prozeß beteiligt sind, als inkompressibel angenommen werden, entfällt die Berechnung des Dichtefeldes. Wird zusätzlich angenommen, daß die Viskositäten der Fluide konstant sind, ist die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes unabhängig von der Berechnung des Temperaturfeldes [25]. Die Temperaturfelder der strömenden Fluide bei bekannten Geschwindigkeitsfeldern werden mit der Energiegleichung 4.1 berechnet [26]:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{w} \nabla T \right) = -\nabla \cdot \vec{q} - \nabla \cdot \vec{q}^{(turb)} + \Phi. \quad (4.1)$$

Bei den Größen, die in Gleichung 4.1 auftreten, sind die kleinen unregelmäßigen turbulenten Schwankungen herausgemittelt worden. Die langsamen Änderungen der Größen, die durch die Randbedingungen des Prozesses aufgeprägt werden, bleiben jedoch erhalten. In der vorliegenden Arbeit werden im Mittel instationäre Prozesse [27] untersucht.

Es wird angenommen, daß die spezifischen Wärmekapazitäten der inkompressiblen Fluide ( $c_p = c_v = c$ ) konstant sind und daß der Dissipationsterm  $\Phi$  vernachlässigbar ist. Für den Vektor der Wärmestromdichte  $\vec{q}$  wird der Fouriersche Ansatz für ein isotropes Medium mit konstanter Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  verwendet:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T. \quad (4.2)$$

Für den turbulenten Energiestromdichtevektor  $\vec{q}^{(turb)}$  wird der empirische Ansatz der turbulenten Wärmeleitfähigkeit  $\lambda^{(turb)}$  verwendet [26]:

$$\vec{q}^{(turb)} = -\lambda^{(turb)} \nabla T. \quad (4.3)$$

Die turbulente Wärmeleitfähigkeit ist kein Stoffwert des Fluids, sondern eine Funktion der turbulenten Schwankungsbewegungen der Strömung. An den Wänden, die das strömende Fluid begrenzen, kommen die turbulenten Schwankungsbewegungen zum Erliegen. Hier muß auch die turbulente Wärmeleitfähigkeit verschwinden [26].

Mit dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz und dem Ansatz der turbulenten Wärmeleitfähigkeit lautet die Energiegleichung

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{w} \nabla T \right) = \lambda \Delta T + \nabla \cdot (\lambda^{(turb)} \nabla T). \quad (4.4)$$

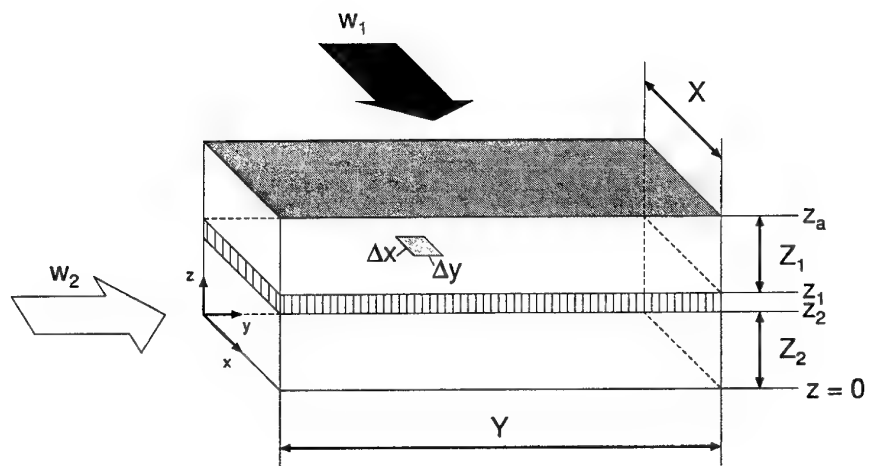
Für das Geschwindigkeitsfeld wird angenommen, daß jedes Fluid durch einen Kanal mit konstantem Querschnitt strömt. Das Geschwindigkeitsprofil ist zu jedem Zeitpunkt kolbenförmig.

Im folgenden wird die Energiegleichung 4.4 für die Fluidströme in den Wärmeübertragern und Verbindungsleitungen ausgewertet. Dabei werden die adiabate Mischtemperatur und der lokale Wärmeübergangskoeffizient eingeführt. Da die adiabate Mischtemperatur ein Mittelwert ist, reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen in den Energiegleichungen.

Begonnen wird mit dem Kreuzstrom. Die Fluidströme können hier unvermischt oder quervermischt sein.

#### 4.1.1 Kreuzstrom

Die Geometrie, das Koordinatensystem und die Bezeichnungen für einen einfachen Platten-Kreuzstromwärmeübertrager sind in Abb. 4.1 dargestellt. Bis auf die wärmeübertragende Wand sind alle Begrenzungen der Strömung adiabat. Das System wird in kartesischen Koordinaten beschrieben, Abb. 4.1.



**Abb. 4.1.** Schematische Darstellung eines einfachen Platten-Kreuzstromwärmeübertragers.  
Die Strömungsrichtungen der Fluide sind senkrecht zueinander.

#### 4.1.1.1 Unvermischte Strömung

Zunächst wird der Fall der unvermischten Strömung anhand der Energiegleichung für den Fluidstrom 1 dargestellt. Dazu werden die Operatoren der Energiegleichung 4.4 für den Fluidstrom 1 in kartesischen Koordinaten ausgedrückt:

$$\varrho_1 c_{p1} \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_1^{(turb)} \frac{\partial T_1}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda_1^{(turb)} \frac{\partial T_1}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_1^{(turb)} \frac{\partial T_1}{\partial z} \right]. \quad (4.5)$$

Eine unvermischte Strömung liegt beispielsweise vor, wenn der Strömungskanal durch Längsrippen in viele kleine Kanäle aufgeteilt ist, die praktisch nicht mehr miteinander in Wechselwirkung treten. Für den Fluidstrom 1 werden deshalb die Transportterme der Energiegleichung in  $y$ -Richtung fortgelassen:

$$\varrho_1 c_{p1} \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_1^{(turb)} \frac{\partial T_1}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_1^{(turb)} \frac{\partial T_1}{\partial z} \right]. \quad (4.6)$$

Anschließend wird der lokale Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  eingeführt. Er ist durch Gl. 4.7 definiert [18]:

$$\dot{q}_W = \alpha(T_m - T_W). \quad (4.7)$$

Mit  $\dot{q}_W$  wird die lokale Wärmestromdichte bezeichnet, die an der wärmeübertragenden Wand auftritt. Ist sie positiv, so fließt Wärme vom Fluid in die Wand, ist sie negativ, so fließt Wärme von der Wand in das Fluid. Mit  $T_m$  wird die adiabate Mischtemperatur bezeichnet. Für den lokalen Wärmeübergangskoeffizienten gilt die Wärmeübergangsbedingung 4.8 [21]:

$$\alpha(T_m - T_W) = - \frac{\vec{f}}{|\vec{f}|} \lambda (\nabla T)_W. \quad (4.8)$$

Der Vektor  $\vec{f}$  ist der nach außen gerichtete Normalenvektor auf der Oberfläche eines an eine Kanalwand grenzenden Fluidelements.

Die adiabate Mischtemperatur für den Fluidstrom 1 wird nach Gl. 4.9 gebildet:

$$T_{m1}(x, y, t) = \frac{\int_{z_1}^{z_a} w_1 T_1 dz}{\int_{z_1}^{z_a} w_1 dz} = \frac{w_1 \int_{z_1}^{z_a} T_1 dz}{w_1 \int_{z_1}^{z_a} dz} = \frac{1}{Z_1} \int_{z_1}^{z_a} T_1 dz. \quad (4.9)$$

Um die adiabate Mischtemperatur einzuführen, wird die Energiegleichung 4.6 entlang der  $z$ -Koordinate von  $z = z_1$  bis  $z = z_a$  integriert. Dabei wird die Reihenfolge von Integration und Differentiation nach der Leibnizschen Regel [27] vertauscht. Das Ergebnis lautet

$$\varrho_1 c_{p1} \left( \frac{\partial \int_{z_1}^{z_a} T_1 dz}{\partial t} + w_1 \frac{\partial \int_{z_1}^{z_a} T_1 dz}{\partial x} \right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 \int_{z_1}^{z_a} T_1 dz}{\partial x^2} + \left[ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \right]_{z_1}^{z_a} + \int_{z_1}^{z_a} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_1^{(turb)} \frac{\partial T_1}{\partial x} \right] dz + \left[ \lambda_1^{(turb)} \frac{\partial T_1}{\partial z} \right]_{z_1}^{z_a} \quad (4.10)$$

bzw. mit Gl. 4.9

$$\varrho_1 c_{p1} \left( \frac{\partial T_{m1}}{\partial t} + w_1 \frac{\partial T_{m1}}{\partial x} \right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_{m1}}{\partial x^2} + \frac{1}{Z_1} \left[ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \right]_{z_1}^{z_a} + \frac{1}{Z_1} \int_{z_1}^{z_a} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_1^{(turb)} \frac{\partial T_1}{\partial x} \right] dz + \frac{1}{Z_1} \left[ \lambda_1^{(turb)} \frac{\partial T_1}{\partial z} \right]_{z_1}^{z_a}. \quad (4.11)$$

Die turbulente Wärmeleitfähigkeit verschwindet an den Kanalbegrenzungen. Insbesondere gilt

$$\lambda_1^{(turb)}(x, y, z = z_1, t) = 0, \quad (4.12)$$

$$\lambda_1^{(turb)}(x, y, z = z_a, t) = 0. \quad (4.13)$$

Damit entfällt der vierte Summand auf der rechten Seite von Gl. 4.11.

Der Term  $\frac{1}{Z_1} \left[ \lambda \frac{\partial T_1}{\partial z} \right]_{z_1}^{z_a}$  auf der rechten Seite von Gl. 4.11 wird an der unteren Integrationsgrenze ( $z = z_1$ ) durch die Wärmeübergangsbedingung 4.8 ausgedrückt. Sie lautet für den Fluidstrom 1

$$\alpha_1(x, y, t)(T_{m1} - T_W) = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} \big|_{z=z_1} \\ \frac{\partial T_1}{\partial y} \big|_{z=z_1} \\ \frac{\partial T_1}{\partial z} \big|_{z=z_1} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

An der oberen Integrationsgrenze mit  $z = z_a$  liegt eine adiabate Kanalwand. Der Temperaturgradient in  $z$ -Richtung und damit der gesamte Ausdruck  $\frac{1}{Z_1} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \big|_{z=a}$  wird hier null.

Das Ergebnis ist die partielle Differentialgleichung 4.15, welche das zweidimensionale Feld der adiabaten Mischtemperatur des Fluidstroms 1 beschreibt:

$$\varrho_1 c_{p1} \left( \frac{\partial T_{m1}}{\partial t} + w_1 \frac{\partial T_{m1}}{\partial x} \right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_{m1}}{\partial x^2} + \frac{\alpha_1}{Z_1} (T_W - T_{m1}) + \frac{1}{Z_1} \int_{z_1}^{z_a} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_1^{(turb)} \frac{\partial T_1}{\partial x} \right] dz. \quad (4.15)$$



Die Größenordnung der einzelnen Terme von Gl. 4.15 wird nach Martin [10] abgeschätzt. Der erste Summand auf der rechten Seite beschreibt die Längsleitung. Er kann fortgelassen werden, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{\alpha_1(x, y, t)4Z_1}{\lambda_1} \ll \left( \frac{w_1(t)4Z_1}{\nu_1} \frac{\varrho_1 \nu_1 c_{p1}}{\lambda_1} \right)^2. \quad (4.16)$$

Der dritte Summand auf der rechten Seite von Gl. 4.15 beschreibt den Energietransport aufgrund turbulenter Schwankungsbewegungen in Strömungsrichtung. Er kann fortgelassen werden, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{\alpha_1(x, y, t)4Z_1}{\lambda_1} \ll \left( \frac{w_1(t)4Z_1}{\nu_1} \right)^2 \frac{\varrho_1 \nu_1 c_{p1}}{\lambda_1} \frac{\varrho_1 \nu_1 c_{p1}}{\lambda_1^{(turb)}}. \quad (4.17)$$

Wenn die Bedingungen 4.16 und 4.17 erfüllt sind, lautet die Energiegleichung für den unvermischten Fluidstrom 1

$$\varrho_1 c_{p1} \left( \frac{\partial T_{m1}}{\partial t} + w_1 \frac{\partial T_{m1}}{\partial x} \right) = \frac{\alpha_1}{Z_1} (T_W - T_{m1}). \quad (4.18)$$

Wenn die Bedingungen 4.16 und 4.17 nicht erfüllt sind, kann das Dispersionsmodell nach Roetzel [3] angewendet werden. Dieses Modell berücksichtigt einen Energietransport in Strömungsrichtung aufgrund von Wärmeleitung, turbulenten Schwankungsbewegungen und Abweichungen des Geschwindigkeitsprofils der Strömung von der angenommenen Kolbenform.

Nach der ausführlichen Darstellung der Herleitung für den Fluidstrom 1 werden für den Fluidstrom 2 nur die wichtigsten Zwischenschritte angegeben. Die Geometrie des Strömungskanals ist in Abb. 4.1 dargestellt. Die allgemeine Energiegleichung ohne Vereinfachungen lautet

$$\begin{aligned} \varrho_2 c_{p2} \left( \frac{\partial T_2}{\partial t} + w_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \right) &= \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_2^{(turb)} \frac{\partial T_2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda_2^{(turb)} \frac{\partial T_2}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_2^{(turb)} \frac{\partial T_2}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die adiabate Mischtemperatur  $T_{m2}$  wird nach Gl. 4.20 berechnet:

$$T_{m2}(x, y, t) = \frac{\int_0^{z_2} w_2 T_2 dz}{\int_0^{z_2} w_2 dz} = \frac{w_2 \int_{z_0}^{z_2} T_2 dz}{w_2 \int_{z_0}^{z_2} dz} = \frac{1}{Z_2} \int_0^{z_2} T_2 dz. \quad (4.20)$$

Die Wärmeübergangsbedingung 4.8 hat die Gestalt

$$\alpha_2(x, y, t)(T_{m2} - T_W) = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial x} \big|_{z=z_2} \\ \frac{\partial T_2}{\partial y} \big|_{z=z_2} \\ \frac{\partial T_2}{\partial z} \big|_{z=z_2} \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Die Bedingungen für die Vernachlässigung von Längsleitung lautet

$$\frac{\alpha_2(x, y, t)4Z_2}{\lambda_2} \ll \left( \frac{w_2(t)4Z_2}{\nu_2} \frac{\varrho_2\nu_2c_{p2}}{\lambda_2} \right)^2. \quad (4.22)$$

Die Bedingung für die Vernachlässigung von Energietransport aufgrund turbulenter Schwankungsbewegungen in Strömungsrichtung lautet

$$\frac{\alpha_2(x, y, t)4Z_2}{\lambda_2} \ll \left( \frac{w_2(t)4Z_2}{\nu_2} \right)^2 \frac{\varrho_2\nu_2c_{p2}}{\lambda_2} \frac{\varrho_2\nu_2c_{p2}}{\lambda_2^{(turb)}}. \quad (4.23)$$

Die Energiegleichung für die Berechnung der zweidimensionalen Felder der adiabaten Mischtemperatur lautet

$$\varrho_2c_{p2} \left( \frac{\partial T_{m2}}{\partial t} + w_2 \frac{\partial T_{m2}}{\partial y} \right) = \frac{\alpha_2}{Z_2} (T_W - T_{m2}). \quad (4.24)$$

**Tabelle 4.1.** Typische Stoffwerte für die Fluide im gekoppelten System [7] [1].

	Einheit	Natrium	Wasser	Luft
$T$	° C	98	20	100
$p$	bar	1	1	1
$Pr$	–	0,0111	7,001	0,7070

Um die Bedingungen für die Vernachlässigung der Längsleitung 4.16 bzw. 4.22 auszuwerten, werden die Prandtlzahlen  $Pr_1 = \varrho_1\nu_1c_{p1}/\lambda_1$  und  $Pr_2 = \varrho_2\nu_2c_{p2}/\lambda_2$  benötigt. Wie Tab. 4.1 zeigt, ist die Prandtl-Zahl bei flüssigen Metallen klein im Vergleich zu der Prandtl-Zahl der anderen Fluide. Bei Prozessen mit den Fluiden Luft und Wasser sind die Bedingungen 4.16 bzw. 4.22 in der Regel erfüllt [10]. Bei Prozessen mit flüssigen Metallen sind sie in jedem Fall zu überprüfen.

#### 4.1.1.2 Quervermischte Strömung

Wenn ein Gas ein unberipptes Rohrbündel quer überströmt, wird der Gasstrom mit dem Modell der Quervermischung behandelt. Als Folge der zahlreichen Wirbelablösungen hinter den Rohren ist die Strömung in jedem Strömungsquerschnitt vollständig vermischt, so daß die Fluidtemperatur nur noch von der Koordinate in Strömungsrichtung abhängig ist [28]. Dies ist eine vereinfachende Annahme, die mit guter Näherung bei kurzen Rohren zutrifft.

Hier ist anzumerken, daß turbulente Durchmischung immer erst in einiger Entfernung von den Kanalwänden möglich ist [18]. Eine vollkommene Durchmischung und damit eine einheitliche Temperatur über den gesamten Strömungsquerschnitt ist in der Realität nicht möglich.

Für eine Berechnung mit den Modellgleichungen des einfachen Platten-Kreuzstromwärmeübertragers müssen die Rohre möglichst eng nebeneinander liegen, damit die Kontinuität der wärmeübertragenden Fläche, die im Modell vorliegt, auf den Realfall angewendet werden kann [28].

Die Herleitung der Energiegleichung für die adiabate Mischtemperatur wird zunächst für den Fluidstrom 1, Gl. 4.5, dargestellt: Im turbulenten Kern treten aufgrund der Durchmischung keine Temperaturgradienten in einem Strömungsquerschnitt auf. Nach dem Fourierschen Gesetz treten auch keine Gradienten in  $y$ -Richtung an den adiabaten Kanalbegrenzungen bei  $y = 0$  und  $y = Y$  und in  $z$ -Richtung an der adiabaten Kanalbegrenzung bei  $z = z_a$  auf. Bis in unmittelbarer Nähe zur wärmeübertragenden Wand ist die Temperatur im Strömungsquerschnitt einheitlich. In der Nähe der wärmeübertragenden Wand kommt die turbulente Durchmischung zum Erliegen. Es bilden sich Temperaturgradienten sowohl in  $y$  als auch in  $z$ -Richtung aus. Dieser Bereich wird laminare Unterschicht genannt [27]. Ihre Dicke wird mit  $\delta_z$  bezeichnet.

Die Energiegleichung 4.5 wird entlang der  $z$ -Koordinate von  $z = z_1$  bis  $z = z_a$  integriert, die adiabate Mischtemperatur nach Gl. 4.9 eingeführt und die Wärmeübergangsbedingung Gl. 4.14 eingesetzt. Die Energiegleichung lautet dann

$$\varrho_1 c_{p1} \left( \frac{\partial T_{m1}}{\partial t} + w_1 \frac{\partial T_{m1}}{\partial x} \right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_{m1}}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 T_{m1}}{\partial y^2} + \frac{\alpha_1}{Z_1} (T_W - T_{m1}) + \int_{z_1}^{z_a} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_1^{(turb)} \frac{\partial T_1}{\partial x} \right] dz. \quad (4.25)$$

Es wird vorausgesetzt, daß die Bedingungen für die Vernachlässigung von Längsleitung 4.16 und Energietransport aufgrund turbulenter Schwankungsbewegungen in Strömungsrichtung 4.17 erfüllt sind. Die Wärmeleitung in  $y$ -Richtung kann dann ebenfalls gegenüber der Wärmeübertragung über die Kanalwand vernachlässigt werden. Damit lautet die Energiegleichung

$$\varrho_1 c_{p1} \left( \frac{\partial T_{m1}(x, y, t)}{\partial t} + w_1(t) \frac{\partial T_{m1}(x, y, t)}{\partial x} \right) = \frac{\alpha_1(x, y, t)}{Z_1} (T_W(x, y, t) - T_{m1}(x, y, t)). \quad (4.26)$$

Gleichung 4.26 stimmt mit der Energiegleichung für die unvermischte Strömung 4.18 überein. Verantwortlich dafür ist die Strömung in unmittelbarer Nähe zur wärmeübertragenden Wand. In ihr liegen unvermischte Verhältnisse vor.

Die Voraussetzung, daß im Strömungskern in jedem Querschnitt eine einheitliche Temperatur herrscht, hat kaum Vereinfachungen gebracht. Um die Energiegleichung nennenswert zu vereinfachen, wird die adiabate Mischtemperatur, Gl. 4.9, folgendermaßen dargestellt:

$$T_{m1}(x, y, t) = \underbrace{\frac{1}{Z_1} \int_{z_1}^{z_1+\delta_z} T_1(x, y, z, t) dz}_{\approx 0} + \frac{1}{Z_1} \int_{z_1+\delta_z}^{z_a} T_1(x, t) dz. \quad (4.27)$$

Der Integrationsbereich ist in zwei Bereiche aufgeteilt worden. Der erste Bereich ist die unmittelbare Nähe zur wärmeübertragenden Wand und hat die sehr kleine Abmessung  $\delta_z$  in  $z$ -Richtung. Hier sind die turbulenten Schwankungsbewegungen praktisch zum Erliegen gekommen. Der zweite Bereich umfaßt den Rest des Strömungsquerschnitts. Hier herrscht eine einheitliche Temperatur.

Der erste Summand auf der rechten Seite von Gl. 4.27 wird vernachlässigt, da der Integrationsbereich sehr klein ist, so daß die adiabate Mischtemperatur nur von zwei Veränderlichen abhängt:

$$T_{m1} = T_{m1}(x, t). \quad (4.28)$$

Wie in Abschnitt 4.4 dargestellt wird, muß für den Wärmeübergangskoeffizienten aufgrund der Datenlage angenommen werden, daß er eine reine Zeitfunktion ist:

$$\alpha = \alpha(t). \quad (4.29)$$

Die Gln. 4.28 und 4.29, in Gl. 4.26 eingesetzt, führen zu einem mathematischen Widerspruch, da dann drei Summanden von zwei Variablen abhängen, ein Summand aber von drei Variablen.

Um dennoch die Energiegleichung verwenden zu können, wird Gl. 4.26 von  $y = 0$  bis  $y = Y$  integriert. Dabei wird der Wärmeübergangskoeffizient als reine Zeitfunktion behandelt. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} & \varrho_1 c_{p1} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^Y T_{m1}(x, y, t) dy \right] + w_1(t) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^Y T_{m1}(x, y, t) dy \right] \right) \\ &= \frac{\alpha_1(t)}{Z_1} \left( \int_0^Y T_w(x, y, t) dy - \int_0^Y T_{m1}(x, y, t) dy \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Wenn in Gl. 4.30 die Näherung

$$T_{m1}(x, y, t) \approx T_{m1}(x, t) = \frac{1}{Z_1} \int_{z_1+\delta_z}^{z_a} T_1(x, t) dz \quad (4.31)$$

eingesetzt wird, ergibt sich die mathematisch widerspruchsfreie Energiegleichung 4.32 für den quervermischten Fluidstrom 1:

$$\varrho_1 c_{p1} \left( \frac{\partial T_{m1}(x, t)}{\partial t} + w_1(t) \frac{\partial T_{m1}(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\alpha_1(t)}{Z_1} \left( \frac{\int_0^Y T_W(x, y, t) dy}{Y} - T_{m1}(x, t) \right). \quad (4.32)$$

Wenn der Fluidstrom 2 als quervermischt betrachtet wird, lautet die Energiegleichung

$$\varrho_2 c_{p2} \left( \frac{\partial T_{m2}(y, t)}{\partial t} + w_2(t) \frac{\partial T_{m2}(y, t)}{\partial y} \right) = \frac{\alpha_2(t)}{Z_2} \left( \frac{\int_0^X T_W(x, y, t) dx}{X} - T_{m2}(y, t) \right). \quad (4.33)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird der einseitig quervermischte Kreuzstrom behandelt, d.h. ein Fluidstrom ist quervermischt, der andere unvermischt. Sind beide Fluidströme unvermischt, spricht man vom reinen Kreuzstrom. Sind beide vermischt, spricht man vom beidseitig quervermischten Kreuzstrom. Reiner Kreuzstrom und beidseitig quervermischter Kreuzstrom werden hier nicht behandelt.

Wie festgelegt, soll im zusammenschalteten System der Hauptstrom den Index 1 und der Umlaufstrom den Index 2 tragen. Daher gilt:

- Für den Fall, daß die Hauptströme unvermischt sind und der Umlaufstrom quervermischt ist, sind die Gln. 4.18 und 4.33 zu verwenden.
- Für den Fall, daß die Hauptströme quervermischt sind und der Umlaufstrom unvermischt ist, sind die Gln. 4.32 und 4.24 zu verwenden.

## 4.1.2 Gegenstrom

Beim Gegenstrom sind die Hauptströmungsrichtungen der beiden Fluide entgegengesetzt parallel, Abb. 4.2. Die Temperaturfelder sind unabhängig von der  $y$ -Koordinate. Für den Fluidstrom 1 lautet die zweidimensionale Energiegleichung für einen beliebigen Punkt im Strömungsfeld

$$\begin{aligned} \varrho_1 c_{p1} \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) &= \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_1^{(turb)} \frac{\partial T_1}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_1^{(turb)} \frac{\partial T_1}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

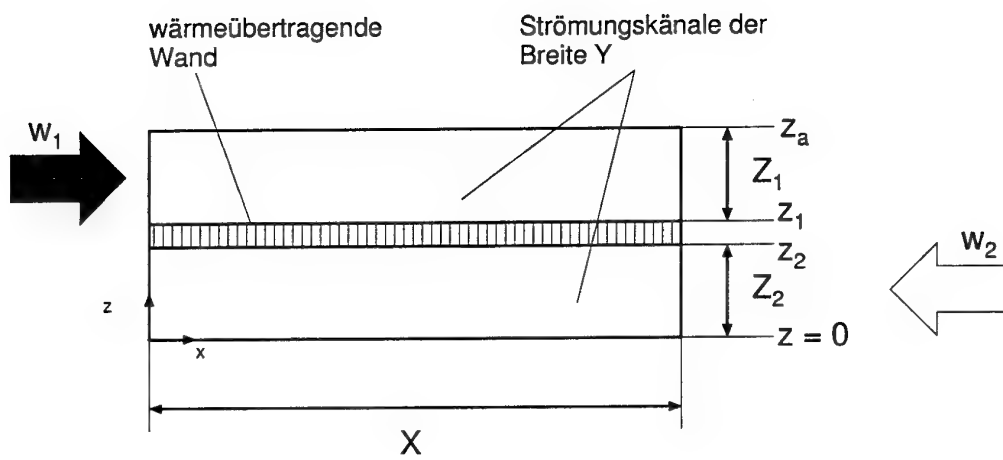


Abb. 4.2. Schematisierte Darstellung eines Gegenstrom-Wärmeübertragers. Die Strömungsrichtungen der Fluide sind parallel.

Das Fluid 2 strömt entgegengesetzt zur  $x$ -Koordinate und besitzt die Energiegleichung

$$\begin{aligned} \varrho_2 c_{p2} \left( \frac{\partial T_2}{\partial t} - w_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) &= \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_2^{(turb)} \frac{\partial T_2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_2^{(turb)} \frac{\partial T_2}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die Energiegleichungen werden integriert und adiabate Mischtemperaturen eingeführt. Da die Methoden aus dem vorigen Abschnitt zum Einsatz kommen, werden nur die wichtigsten Zwischenschritte angegeben.

Die adiabaten Mischtemperaturen werden nach den Gln. 4.36 und 4.37 gebildet:

$$T_{m1}(x, t) = \frac{\int_{z_1}^{z_a} w_1 T_1 dz}{\int_{z_1}^{z_a} w_1 dz} = \frac{w_1 \int_{z_1}^{z_a} T_1 dz}{w_1 \int_{z_1}^{z_a} dz} = \frac{1}{Z_1} \int_{z_1}^{z_a} T_1 dz \quad (4.36)$$

$$T_{m2}(x, t) = \frac{\int_0^{z_2} w_2 T_2 dz}{\int_0^{z_2} w_2 dz} = \frac{w_2 \int_0^{z_2} T_2 dz}{w_2 \int_0^{z_2} dz} = \frac{1}{Z_2} \int_0^{z_2} T_2 dz. \quad (4.37)$$

Die Wärmeübergangsbedingungen für die beiden Fluidströme lauten

$$\alpha_1(x, t)(T_{m1} - T_W) = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{z=z_1} \quad (4.38)$$

$$\alpha_2(x, t)(T_{m2} - T_W) = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{z=z_2}. \quad (4.39)$$

Die Bedingungen für die Vernachlässigung von Längsleitung und Energietransport aufgrund turbulenter Schwankungsbewegungen in Strömungsrichtung lauten

$$\frac{\alpha_1(x, t) 4Z_1}{\lambda_1} \ll \left( \frac{w_1(t) 4Z_1}{\nu_1} \frac{\varrho_1 \nu_1 c_{p1}}{\lambda_1} \right)^2 \quad (4.40)$$

$$\frac{\alpha_1(x, t) 4Z_1}{\lambda_1} \ll \left( \frac{w_1(t) 4Z_1}{\nu_1} \right)^2 \frac{\varrho_1 \nu_1 c_{p1}}{\lambda_1} \frac{\varrho_1 \nu_1 c_{p1}}{\lambda_1^{(turb)}} \quad (4.41)$$

$$\frac{\alpha_2(x, t) 4Z_2}{\lambda_2} \ll \left( \frac{w_2(t) 4Z_2}{\nu_2} \frac{\varrho_2 \nu_2 c_{p2}}{\lambda_2} \right)^2 \quad (4.42)$$

$$\frac{\alpha_2(x, t) 4Z_2}{\lambda_2} \ll \left( \frac{w_2(t) 4Z_2}{\nu_2} \right)^2 \frac{\varrho_2 \nu_2 c_{p2}}{\lambda_2} \frac{\varrho_2 \nu_2 c_{p2}}{\lambda_2^{(turb)}}. \quad (4.43)$$

Die Energiegleichungen für die adiabaten Mischtemperaturen der Fluidströme 1 und 2 sind eindimensional. Es gelten die Gln. 4.44 bzw. 4.45:

$$\varrho_1 c_{p1} \left( \frac{\partial T_{m1}}{\partial t} + w_1 \frac{\partial T_{m1}}{\partial x} \right) = \frac{\alpha_1}{Z_1} (T_W - T_{m1}) \quad (4.44)$$

$$\varrho_2 c_{p2} \left( \frac{\partial T_{m2}}{\partial t} - w_2 \frac{\partial T_{m2}}{\partial x} \right) = \frac{\alpha_2}{Z_2} (T_W - T_{m2}). \quad (4.45)$$

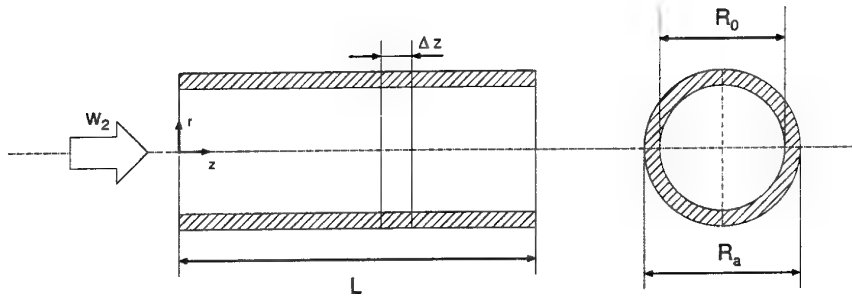


Abb. 4.3. Verbindungsleitung.

### 4.1.3 Verbindungsleitung

Die Verbindungsleitungen sind in der Regel Kreisrohre, Abb. 4.3. Das Temperaturfeld wird in Zylinderkoordinaten beschrieben. Es wird angenommen, daß die Temperaturfelder des Fluids und der Rohrwand rotationssymmetrisch sind. Die Energiegleichung 4.4 für einen beliebigen Punkt im Strömungsfeld lautet

$$\begin{aligned} \varrho_2 c_{p2} \left( \frac{\partial T_2}{\partial t} + w_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) = & \lambda_2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) \right] + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_2^{(turb)} r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_2^{(turb)} \frac{\partial T_2}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Die adiabate Mischtemperatur wird nach Gl. 4.47 berechnet:

$$T_{m2}(z, t) = \frac{\int_0^{R_0} w_2 T_2 2\pi r dr}{\int_0^{R_0} w_2 2\pi r dr} = \frac{2}{R_0^2} \int_0^{R_0} T_2 r dr. \quad (4.47)$$

Die Wärmeübergangsbedingung 4.8 hat für den Rohrstrom die Gestalt

$$\alpha_2(T_{m2} - T_W) = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial r} \big|_{r=R_0} \\ \frac{\partial T_2}{\partial z} \big|_{r=R_0} \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Die Bedingungen für die Vernachlässigung von Längsleitung und Energietransport aufgrund turbulenter Schwankungsbewegungen in Strömungsrichtung lauten

$$\frac{\alpha_2(r, t) 2R_0}{\lambda_2} \ll \left( \frac{w_2(t) 2R_0}{\nu_2} \frac{\varrho_2 \nu_2 c_{p2}}{\lambda_2} \right)^2 \quad (4.49)$$

$$\frac{\alpha_2(r, t) 2R_0}{\lambda_2} \ll \left( \frac{w_2(t) 2R_0}{\nu_2} \right)^2 \frac{\varrho_2 \nu_2 c_{p2}}{\lambda_2} \frac{\varrho_2 \nu_2 c_{p2}}{\lambda_2^{(turb)}}. \quad (4.50)$$



Integration von Gl. 4.46 über den Strömungsquerschnitt unter Berücksichtigung der Gln. 4.47 bis 4.50 ergibt die Differentialgleichung 4.51 für die adiabate Mischtemperatur des Rohrstroms:

$$\varrho_2 c_{p2} \left( \frac{\partial T_{m2}}{\partial t} + w_2 \frac{\partial T_{m2}}{\partial z} \right) = \frac{\alpha_2 2\pi R_0}{\pi R_0^2} (T_W - T_{m2}). \quad (4.51)$$

#### 4.1.4 Zusammenstellung der Gleichungen für die Fluidströme

In dieser Arbeit werden zusammenschaltete Systeme aus vier Arten von Untersystemen untersucht:

1. Gegenstrom-Wärmeübertrager,
2. Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit quervermischem Umlaufstrom,
3. Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit quervermischten Hauptströmen und
4. Verbindungsleitungen.

Die Energiegleichungen für die Fluidströme (Gln. 4.18, 4.24, 4.32, 4.33, 4.44, 4.45 und 4.51) lassen sich alle in einer einheitlichen Form darstellen [3]:

$$\varrho_i c_{pi} A_{qi} \left( \frac{\partial T_i}{\partial t} + w_i \frac{\partial T_i}{\partial l_i} \right) = \Upsilon_i \quad i = 1, 2. \quad (4.52)$$

Die einzelnen Parameter dieser Gleichung sind für die vier Untersysteme in Tab. 4.2 zusammengestellt.

**Tabelle 4.2.** Parameter der Energiegleichungen der Fluidströme in Gl. 4.52.

	Gegenstrom	Kreuzstrom	Kreuzstrom	Rohrstrom
$\Upsilon_1$	$\frac{\alpha_1 XY}{X} (T_W - T_1)$	$\frac{\alpha_1 XY}{X} (T_W - T_1)$ unvermischt	$\frac{\alpha_1 XY}{X} \left[ \frac{\int_0^Y T_W dy}{Y} - T_1 \right]$ quervermischt	
$l_1$	$x$	$x$	$x$	
$\Upsilon_2$	$\frac{\alpha_2 XY}{X} (T_W - T_2)$	$\frac{\alpha_2 XY}{Y} \left[ \frac{\int_0^X T_W dx}{X} - T_2 \right]$ quervermischt	$\frac{\alpha_2 XY}{Y} (T_W - T_2)$ unvermischt	$\frac{\alpha_2 2\pi R_0 L}{L} (T_W - T_2)$
$l_2$	$-x$	$y$	$y$	$z$

Bei den Fluidtemperaturen in Gl. 4.52 handelt es sich um adiabate Mischtemperaturen  $T_m$ . Im folgenden werden ausschließlich adiabate Mischtemperaturen der Fluide betrachtet, und der Index  $m$  wird fortgelassen.

Auch die Terme  $\Upsilon_i$  in Tab. 4.2 haben alle die gleiche Struktur: Der Wärmeübergangskoeffizient wird mit der wärmeübertragenden Fläche und einer treibenden Temperaturdifferenz multipliziert und durch den Strömungsweg dividiert.

Weicht die Realisierung der Stromführung in den Wärmeübertragern von der Strömung durch unberippte Rechteckkanäle ab, kann man sich die aufgezeigte Struktur der Energiegleichungen zunutze machen, um auch diese näherungsweise zu berechnen. Dazu werden geeignete Mittelwerte für den Strömungsquerschnitt, die Strömungsgeschwindigkeit und den Strömungsweg in Gl. 4.52 eingeführt. Wenn die Wände berippt sind, wird die wärmeübertragende Fläche mit dem Oberflächenwirkungsgrad nach Gl. 2.35 bzw. Gl. 2.36 multipliziert [3]. Aus Gründen der mathematischen Handhabbarkeit ist diese Vorgehensweise für die Berechnung gekoppelter Wärmeübertrager gut geeignet.

## 4.2 Wärmeübertragende Wand zwischen den beiden Fluidströmen

Die Differentialgleichung für das Temperaturfeld der wärmeübertragenden Wand wird mit Hilfe des ersten Hauptsatzes für ein ruhendes geschlossenes System aufgestellt [29]:

$$\frac{dU_W}{dt} = \int_{A_{sys}} \dot{q} dA. \quad (4.53)$$

Mit  $A_{sys}$  wird die Oberfläche des Systems bezeichnet.

Als System wird ein kleines, quaderförmiges Wandelement mit den Kantenlängen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\delta_W = z_1 - z_2$ , Abb. 4.1, verwendet. Die Oberfläche  $A_{sys}$  setzt sich aus den sechs Oberflächen des kleinen Quaders zusammen. Nur an den beiden Oberflächen, die an die strömenden Fluide grenzen, werden Wärmeströme zu- bzw. abgeführt. Die anderen vier Oberflächen werden als adiabat angenommen. Es wird angenommen, daß die Wand nur in  $z$ -Richtung Wärme leitet.

Die lokalen Wärmestromdichten sind durch die Wärmeübergangsbedingungen gegeben, die bei der Untersuchung der strömenden Fluide eingeführt worden sind. An der

Oberfläche, die an das strömende Fluid 1 grenzt, lautet die Wärmeübergangsbedingung

$$\dot{q}_1 = \alpha_1(T_{m1} - T_W) \quad (4.54)$$

und an der Oberfläche, die an das strömende Fluid 2 grenzt, lautet sie

$$\dot{q}_2 = \alpha_2(T_{m2} - T_W). \quad (4.55)$$

Für die Berechnung der inneren Energie des kleinen Wandelements in Gl. 4.53 wird die kalorische Zustandsgleichung eines inkompressiblen Fluids mit konstanter spezifischer Wärmekapazität ( $c_p = c_v = c$ )

$$u = u_0 + c_p(T - T_0) \quad (4.56)$$

verwendet. Wie üblich werden Festkörper als inkompressible Fluide behandelt [18].

Die innere Energie des Wandelements wird berechnet, indem die spezifische innere Energie mit der Dichte multipliziert und über das Volumen des Systems integriert wird [29]. Die Dichte des kleinen Wandelements ist konstant. Die spezifische innere Energie kann hingegen eine Funktion von Ort und Zeit sein:

$$U_W = \int_{V_{sys}} u_W \varrho_W dV = u_{0W} \varrho_W V_{sys} + c_{pW} \varrho_W \int_{V_{sys}} T_W(x, y, z, t) dV - c_{pW} T_{0W} \varrho_W V_{sys}. \quad (4.57)$$

Es wird angenommen, daß die Temperatur in dem kleinen Wandelement ortsunabhängig ist. Es verhält sich wie eine thermodynamische Phase. Es wird angenommen, daß die Wand Wärme nur in  $z$ -Richtung leitet und in dieser Richtung eine unendlich hohe Wärmeleitfähigkeit besitzt. Der Wärmeleitungswiderstand der Wand in  $z$ -Richtung ist dann vernachlässigbar klein.

Die Gleichung für die innere Energie des kleinen Wandelements 4.57 lautet dann

$$U_W = \varrho_W \Delta x \Delta y \delta_W [u_{0W} + c_{pW}(T_W(x, y, t) - T_{0W})]. \quad (4.58)$$

Die Gln. 4.58, 4.54 und 4.55 werden in Gl. 4.53 eingesetzt. Das Ergebnis ist die Differentialgleichung für die Berechnung der Wandtemperaturen

$$\alpha_1 XY(T_{m1} - T_W) + \alpha_2 XY(T_{m2} - T_W) = \underbrace{\varrho_W XY \delta_W c_{pW}}_{C_{pW}} \frac{\partial T_W}{\partial t}. \quad (4.59)$$

Gleichung 4.59 hat folgende Struktur: Auf der linken Seite bestehen die beiden Summanden aus dem Produkt von Wärmeübergangskoeffizient, wärmeübertragender Fläche

und treibender Temperaturdifferenz. Auf der rechten Seite steht vor der Zeitableitung der Temperatur die Wärmekapazität der Wand.

Wie in Abschnitt 4.1.4 wird die Struktur der Energiegleichung ausgenutzt, um auch berippte wärmeübertragende Wände näherungsweise instationär zu berechnen. In Gl. 4.59 werden hierzu Oberflächenwirkungsgrade nach Gl. 2.35 bzw. 2.36 eingeführt, und es wird die Summe aus den Wärmekapazitäten von Grundmaterial und Rippen für  $C_{pW}$  eingesetzt [3].

Für Rohrbündelwärmeübertrager haben Roetzel und Xuan [30] [31] Berechnungsverfahren entwickelt, mit denen die Wärmeleitung der Wand in Strömungsrichtung und ein endlicher Wärmeleitungswiderstand der Wand senkrecht zu den Strömungsrichtungen der Fluide im instationären Fall berücksichtigt werden können.

### 4.3 Rohrwand der Verbindungsleitungen

Das System, für das der erste Hauptsatz aufgestellt wird, ist ein kleiner Rohrwandabschnitt mit der Länge  $\Delta z$ , Abb. 4.3. Dem Rohrwandabschnitt wird ein einziger Wärmestrom an der Oberfläche zugeführt, die an das strömende Fluid grenzt. Die lokale Wärmestromdichte ist durch die Wärmeübergangsbedingung gegeben:

$$\dot{q}(z, t) = \alpha_2(z, t)(T_{m2}(z, t) - T_W(z, t)). \quad (4.60)$$

Die anderen drei Oberflächen werden als adiabat angenommen. Es wird angenommen, daß die Wand Wärme nur in radialer Richtung leitet und daß die Verbindungsleitung gut gegen die Umgebung isoliert ist. Die innere Energie des Wandelements wird unter der Annahme berechnet, daß dieses eine einheitliche Temperatur besitzt, d.h. neben der Rotationssymmetrie der Temperaturprofile liegt eine unendlich hohe Wärmeleitfähigkeit in radialer Richtung vor:

$$U_W = \varrho_W \underbrace{\Delta z \pi (R_a^2 - R_0^2)}_{V_{sys}} \underbrace{\{u_{0W} + c_{pW}(T_W(z, t) - T_{W0})\}}_{u_W(T)}. \quad (4.61)$$

Die Gln. 4.61 und 4.60, in den ersten Hauptsatz, Gl. 4.53, eingesetzt, ergeben die Differentialgleichung 4.62 für die Berechnung der Temperaturfelder der Rohrwand:

$$2\pi R_0 \alpha_2 (T_{m2} - T_W) = \varrho_W \pi (R_a^2 - R_0^2) c_{pW} \frac{\partial T_W}{\partial t}. \quad (4.62)$$

#### 4.4 Zusammenhang zwischen Wärmeübergangskoeffizient und Strömungsgeschwindigkeit

Bei der Herleitung der Energiegleichungen ist deutlich geworden, daß die Kenntnis des lokalen Wärmeübergangskoeffizienten in Abhängigkeit von der Zeit von grundlegender Bedeutung für die Berechnung der Temperaturfelder ist.

In der Literatur findet man Daten für den lokalen und den mittleren Wärmeübergangskoeffizienten bei stationärem Betrieb. Für die weitaus meisten Fälle ist der mittlere Wärmeübergangskoeffizient angegeben [32] [12] [33] [1].

Die empirischen Korrelationen für den mittleren oder örtlichen Wärmeübergangskoeffizienten sind häufig in Form eines Potenzansatzes

$$Nu = C_0 Re^m Pr^n \left( \frac{d}{L} \right)^p \quad (4.63)$$

für einen bestimmten Gültigkeitsbereich dargestellt. Die drei Kennzahlen  $Nu$ ,  $Re$  und  $Pr$  werden aus Stoffwerten, charakteristischer Länge  $L_c$ , mittlerer Strömungsgeschwindigkeit  $w$  und dem gesuchten Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  gebildet:

$$Nu = \frac{\alpha L_c}{\lambda}, \quad Re = \frac{w L_c}{\nu} \quad \text{und} \quad Pr = \frac{\nu}{a}. \quad (4.64)$$

Die Zahlenwerte der drei Konstanten  $C_0$ ,  $m$  und  $n$  sowie der Gültigkeitsbereich von Gl. 4.63 sind in der jeweiligen Literaturstelle angegeben. Hier finden sich auch Angaben, bei welchem Druck und bei welcher Temperatur die Stoffwerte zu bestimmen sind, wobei die Druckabhängigkeit in der Regel vernachlässigt wird. Weiterhin wird eine Berechnungsvorschrift für die charakteristische Länge  $L_c$  und die mittlere Strömungsgeschwindigkeit  $w$  angegeben.

Wenn konstante Stoffwerte vorausgesetzt werden, ist – bei festgehaltener Geometrie – der mittlere Wärmeübergangskoeffizient nur eine Funktion der mittleren Strömungsgeschwindigkeit. Es gilt

$$\alpha = C_0 \frac{\lambda}{L_c} \left( \frac{L_c}{\nu} \right)^m \left( \frac{\nu}{a} \right)^n w^m. \quad (4.65)$$

Im folgenden wird angenommen, daß beim Lösen der Energiegleichungen statt des lokalen Wärmeübergangskoeffizienten der mittlere Wärmeübergangskoeffizient nach Gl. 4.65 verwendet werden darf. Dies ist bei turbulenter Strömung zulässig, bei laminarer Strömung nur in langen Kanälen.

Bei der Simulation instationärer Prozesse muß zusätzlich angenommen werden, daß der Wärmeübergangskoeffizient einer Änderung der Strömungsgeschwindigkeit trägheitslos folgt:

$$\alpha(t) = C_0 \frac{\lambda}{L_c} \left( \frac{L_c}{\nu} \right)^m \left( \frac{\nu}{a} \right)^n w(t)^m. \quad (4.66)$$

## 4.5 Einführung der Schwankungsgrößen

Wie in Abschnitt 3 ausgeführt, werden instationäre Prozesse untersucht, die von einem stationären Betriebszustand ausgehen. Daher bietet es sich an, Temperaturen, Strömungsgeschwindigkeiten und Wärmeübergangskoeffizienten in einen stationären Wert und eine zeitabhängige Schwankungsgröße aufzuteilen [13] [14] [15]:

Gesamtgröße = stationärer Wert + Schwankungsgröße.

$$T_i(x, y, t) = \bar{T}_i(x, y) + T'_i(x, y, t) \quad i = 1, 2, W \quad (4.67)$$

$$w_i(t) = \bar{w}_i + w'_i(t) \quad i = 1, 2 \quad (4.68)$$

$$\alpha_i(t) = \bar{\alpha}_i + \alpha'_i(t) \quad i = 1, 2. \quad (4.69)$$

Einsetzen der Gln. 4.68 und 4.69 in Gl. 4.66 ergibt eine Beziehung, die die Schwankungsgrößen von Wärmeübergangskoeffizient und Strömungsgeschwindigkeit miteinander verknüpft:

$$\alpha'_i = \left[ \left( 1 + \frac{w'_i}{\bar{w}_i} \right)^{m_i} - 1 \right] \bar{\alpha}_i \quad i = 1, 2. \quad (4.70)$$

Die Einführung der Schwankungsgrößen in die Energiegleichungen für die Fluidströme und Wände ( Gln. 4.18, 4.24, 4.32, 4.33, 4.44, 4.45, 4.51, 4.59 und 4.62 ) wird anhand der Energiegleichung 4.44 für den Fluidstrom 1 des Gegenstrom-Wärmeübertragers beispielhaft dargestellt.

Wenn ein stationärer Prozeß vorliegt, entfällt die Zeitableitung in der Energiegleichung 4.44, so daß im Fall des Gegenstroms die gewöhnliche Differentialgleichung 4.71 gilt:

$$-\varrho_1 c_{p1} \bar{w}_1 \frac{d\bar{T}_1}{dx} + \frac{\bar{\alpha}_1 Y}{A_{q1}} (\bar{T}_W - \bar{T}_1) = 0. \quad (4.71)$$

Einsetzen von Gl. 4.67–4.69 in Gl. 4.44 unter Berücksichtigung von Gl. 4.71 ergibt eine inhomogene lineare partielle Differentialgleichung mit den zeitabhängigen Koeffizienten

$w'_1$  und  $\alpha'_1$ . Als abhängige Veränderliche besitzt sie die Temperaturschwankungen  $T'_1$  und  $T'_W$ :

$$\left(1 + \frac{w'_1}{\bar{w}_1}\right) \frac{\partial T'_1}{\partial x} - \frac{(\bar{\alpha}_1 + \alpha'_1) Y}{\bar{W}_1} (T'_1 - T'_W) - \underbrace{\left(\frac{\alpha'_1 Y}{\bar{W}_1} - \frac{w'_1 \bar{\alpha}_1 Y}{\bar{w}_1 \bar{W}_1}\right)}_{\text{inhomogener Anteil}} (\bar{T}_1 - \bar{T}_W) = \frac{1}{\bar{w}_1} \frac{\partial T'_1}{\partial t}. \quad (4.72)$$

Um die Gln. 4.71 und 4.72 kompakt darzustellen, werden dimensionslose Koordinaten und Kenngrößen eingeführt, von denen zwei zeitabhängig sind:

$$\xi = \frac{x}{X}, \tau = \frac{t}{t_B}, \bar{N}_1 = \frac{\bar{\alpha}_1 XY}{\bar{W}_1}, N'_1(\tau) = \frac{\alpha'_1 XY}{\bar{W}_1}, \kappa_1 = \frac{X/\bar{w}_1}{t_B}, \sigma_1(\tau) = \frac{w'_1}{\bar{w}_1}. \quad (4.73)$$

Einsetzen der Parameter nach Gl. 4.73 in Gl. 4.72 und in Gl. 4.71 ergibt Differentialgleichungen, in der nur noch die Temperaturen dimensionsbehaftet sind:

$$-\frac{d\bar{T}_1}{d\xi} - \bar{N}_1 (\bar{T}_1 - \bar{T}_W) = 0, \quad (4.74)$$

$$-(1 + \sigma_1) \frac{\partial T'_1}{\partial \xi} - (\bar{N}_1 + N'_1) (T'_1 - T'_W) - (N'_1 - \sigma_1 \bar{N}_1) (\bar{T}_1 - \bar{T}_W) = \kappa_1 \frac{\partial T'_1}{\partial \tau}. \quad (4.75)$$

Gleichung 4.75 wird im folgenden „exakte Energiegleichung“ genannt. Sie besitzt ein Gegenstück, das „linearisierte Energiegleichung“ genannt wird. Dieses wird in Abschnitt 4.8 hergeleitet.

Die exakten Energiegleichungen für alle Fluidströme und die Wände sind in Anh. B in dimensionsloser Form zusammengestellt. Sie ergeben sich aus den Gln. 4.24, 4.32, 4.33, 4.44, 4.45, 4.51, 4.59 und 4.62.

Gleichung 4.70 beschreibt die Abhängigkeit der Schwankung des Wärmeübergangskoeffizienten von der Schwankung der Strömungsgeschwindigkeit. Sie lautet mit den Parametern nach Gl. 4.73 in dimensionsloser Form

$$N'_1(\sigma_1) = [(1 + \sigma_1)^{m_1} - 1] \bar{N}_1. \quad (4.76)$$

## 4.6 Anfangsbedingungen

In den Differentialgleichungen in Anh. B sind die abhängigen Veränderlichen Temperaturschwankungen. Da immer Prozesse betrachtet werden, die von einem stationären Betriebszustand ausgehen, müssen sämtliche Schwankungsgrößen zu Prozeßbeginn gleich

null sein, insbesondere die Temperaturschwankungen. Damit sind die Anfangsbedingungen für die Differentialgleichungen homogen:

$$T'(x, y, t = 0) = 0. \quad (4.77)$$

## 4.7 Kontinuitätsgleichung für den Umlaufstrom

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung wird gezeigt, daß für das umlaufende Fluid die Schwankung der Strömungsgeschwindigkeit, bezogen auf die Strömungsgeschwindigkeit im stationären Ausgangszustand, für alle Untersysteme gleich groß ist.

Die Strömungsgeschwindigkeiten sind zu jedem Zeitpunkt in einem Untersystem örtlich konstant, aber verschieden von Untersystem zu Untersystem. Zu jedem Zeitpunkt können im Gesamtsystem vier verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten für das umlaufende Fluid beobachtet werden. Sie sind durch die Kontinuitätsgleichungen 4.78 gekoppelt:

$$\varrho_2 A_{q2i} w_{2i}(t) = \varrho_2 A_{q2j} w_{2j}(t) \quad i, j = I, II, r, l \quad \text{mit} \quad i \neq j. \quad (4.78)$$

Gleichung 4.78 muß zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein.

Zu Prozeßbeginn bei  $\tau = 0$  liegen die Strömungsgeschwindigkeiten des stationären Ausgangszustands vor:

$$\tau = 0 : A_{q2i} \bar{w}_{2i} = A_{q2j} \bar{w}_{2j} \quad i, j = I, II, r, l \quad \text{mit} \quad i \neq j. \quad (4.79)$$

Für einen beliebigen späteren Zeitpunkt gilt

$$\tau > 0 : A_{q2i} (\bar{w}_{2i} + w'_{2i}) = A_{q2j} (\bar{w}_{2j} + w'_{2j}) \quad i, j = I, II, r, l \quad \text{mit} \quad i \neq j. \quad (4.80)$$

Aus den Gln. 4.79 und 4.80 folgt, daß die dimensionslose Schwankung der Strömungsgeschwindigkeit des umlaufenden Fluids für alle Untersysteme gleich groß sein muß:

$$\frac{w'_{2i}}{\bar{w}_{2i}} = \frac{w'_{2j}}{\bar{w}_{2j}} \quad i, j = I, II, r, l \quad \text{mit} \quad i \neq j \quad (4.81)$$

bzw.

$$\sigma_{2i} = \sigma_{2j} \quad i, j = I, II, r, l \quad \text{mit} \quad i \neq j. \quad (4.82)$$

Die Indizes  $I$ ,  $II$ ,  $r$  und  $l$ , die die Untersysteme kennzeichnen, können daher bei der dimensionslosen Schwankung der Strömungsgeschwindigkeit des umlaufenden Fluids  $\sigma_2$



fortgelassen werden. Neben der dimensionslosen Zeit  $\tau$  ist die dimensionslose Schwankung der Strömungsgeschwindigkeit des umlaufenden Fluids die einzige dimensionslose Größe, die im zusammenschalteten System keinen Index für das Untersystem trägt.

## 4.8 Linearisierung der Energiegleichungen

Wenn die Schwankungsgrößen klein sind, lassen sich die Energiegleichungen für die Fluidströme und Wände (Gln. 4.18, 4.24, 4.32, 4.33, 4.44, 4.45, 4.51, 4.59 und 4.62) um den stationären Ausgangszustand linearisieren [34]. Im mathematischen Sinn sind die aufgezählten Gleichungen bereits linear [35]. Sie besitzen allerdings zeitabhängige Koeffizienten.

Mit dem Begriff Linearisierung wird in der Regelungstechnik eine Rechenvorschrift bezeichnet, die sowohl auf mathematisch lineare als auch mathematisch nichtlineare Differentialgleichungen angewendet werden kann. Das Ergebnis sind immer mathematisch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lassen sich mit der Laplace-Transformation lösen, Abschnitt 5.

Die Linearisierung wird anhand der Energiegleichung 4.44 für den Fluidstrom 1 des Gegenstrom-Wärmeübertragers beispielhaft durchgeführt.

Die Funktion, die linearisiert werden soll, lautet

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} \left( \frac{\partial T_1}{\partial t}, w_1, \frac{\partial T_1}{\partial x}, \alpha_1(w_1), T_W, T_1 \right) \quad (4.83)$$

$$= \varrho_1 c_{p1} \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) - \frac{\alpha_1 Y}{A_{q1}} (T_W - T_1). \quad (4.84)$$

Nachdem die Rechenvorschrift für die Linearisierung [34]

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \approx & \mathcal{F} \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} \Big|_{\text{stat}}, w_1|_{\text{stat}}, \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{\text{stat}}, \alpha_1(w_1)|_{\text{stat}}, T_W|_{\text{stat}}, T_1|_{\text{stat}} \right) + \\ & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} \right)} \Big|_{\text{stat}} \frac{\partial T_1'}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w_1} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_1} \frac{d\alpha_1}{dw_1} \right] \Big|_{\text{stat}} w_1' + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \left( \frac{\partial T_1}{\partial x} \right)} \Big|_{\text{stat}} \frac{\partial T_1'}{\partial x} + \\ & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (T_W)} \Big|_{\text{stat}} T_W' + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (T_1)} \Big|_{\text{stat}} T_1' \end{aligned} \quad (4.85)$$

auf die Funktion  $\mathcal{F}$  angewendet worden ist, ergibt sich die linearisierte Energiegleichung

$$\frac{\partial T'_1}{\partial x} - \frac{\bar{\alpha}_1 Y}{\bar{W}_1} (T'_1 - T'_W) - (m_1 - 1) \frac{\bar{\alpha}_1 Y}{\bar{W}_1} (\bar{T}_1 - \bar{T}_W) \frac{w'_1}{\bar{w}_1} = \frac{1}{\bar{w}_1} \frac{\partial T'_1}{\partial t} \quad (4.86)$$

oder, mit den dimensionslosen Koordinaten und Kenngrößen nach Gl. 4.73,

$$-\frac{\partial T'_1}{\partial \xi} - \bar{N}_1 (T'_1 - T'_W) - (m_1 - 1) \bar{N}_1 (\bar{T}_1 - \bar{T}_W) \sigma_1 = \kappa_1 \frac{\partial T'_1}{\partial \tau}. \quad (4.87)$$

Gleichung 4.87 ist das linearisierte Gegenstück zur exakten Energiegleichung 4.75. Für die Energiegleichungen 4.18, 4.24, 4.32, 4.33, 4.44, 4.45, 4.51, 4.59 und 4.62 sind die zugehörigen linearisierten Energiegleichungen in Anh. B in dimensionsloser Form zusammengestellt.

## 4.9 Einführung einer dimensionslosen Temperatur

Um die Rechenergebnisse für das zusammengeschaltete System normiert darzustellen, wird die dimensionslose Temperatur

$$\theta = \frac{T - \bar{T}_{1,einII}}{\bar{T}_{1,einI} - \bar{T}_{1,einII}} \quad (4.88)$$

eingeführt.

Wenn Gl. 4.67 in Gl. 4.88 eingesetzt wird, zeigt sich, wie sich auch die dimensionslose Temperatur in einen stationären Wert und in eine Schwankungsgröße aufteilen läßt. Es gilt

$$\theta = \frac{\bar{T} + T' - \bar{T}_{1,einII}}{\bar{T}_{1,einI} - \bar{T}_{1,einII}} \quad (4.89)$$

$$= \frac{\bar{T} - \bar{T}_{1,einII}}{\bar{T}_{1,einI} - \bar{T}_{1,einII}} + \frac{T'}{\bar{T}_{1,einI} - \bar{T}_{1,einII}} \quad (4.90)$$

$$= \bar{\theta} + \theta'. \quad (4.91)$$

Die dimensionslosen Temperaturen des stationären Ausgangszustands liegen alle im Intervall  $0 \leq \bar{\theta} \leq 1$  mit

$$\bar{\theta}_{1,einI} = 1 \quad (4.92)$$

$$\bar{\theta}_{1,einII} = 0. \quad (4.93)$$

Die größte dimensionslose Temperaturdifferenz im zusammengeschalteten System hat im stationären Ausgangszustand den Wert 1. Damit lassen sich die Temperaturschwankungen, die während instationärer Prozesse auftreten, in ihrer Größenordnung gut beurteilen.

## 4.10 Rand- und Kopplungsbedingungen

Bisher sind im Rahmen der Systembeschreibung folgende Schritte durchgeführt worden:

- Für die einzelnen Untersysteme sind exakte und linearisierte Energiegleichungen aufgestellt worden, Anh. B. Jedes Untersystem hat dabei ein eigenes räumliches Koordinatensystem, aber alle Untersysteme besitzen die gemeinsame dimensionslose Zeitkoordinate  $\tau$ .
- Weil nur Prozesse untersucht werden, die von einem stationären Betriebszustand ausgehen, sind die Anfangsbedingungen für die exakten und linearisierten Energiegleichungen homogen, Abschnitt 4.6.
- Aus der Kontinuitätsgleichung für das umlaufende Fluid folgt, daß die dimensionslose Schwankung der Strömungsgeschwindigkeit des umlaufenden Fluids  $\sigma_2$  für alle Untersysteme gleich groß ist, Abschnitt 4.7.

Für eine vollständige Beschreibung des Systems sind Rand- und Kopplungsbedingungen notwendig. Die dimensionslosen Eintrittstemperaturen der Hauptströme bzw. deren Schwankungen werden als Randbedingungen vorgegeben.

Die Kopplungsbedingungen lauten: Die Austrittstemperatur des umlaufenden Fluids aus einem Untersystem muß gleich seiner Eintrittstemperatur in das unmittelbar darauf folgende Untersystem sein.

Es wird angenommen, daß die Vorgänge in den Ein- und Austrittshauben der Wärmeübertrager für das Gesamtverhalten des zusammengeschalteten Systems eine untergeordnete Rolle spielen und bei der Simulation fortgelassen werden können. Diese Annahme ist wichtig im Zusammenhang mit der Festlegung und Berechnung der Ein- und Austrittstemperaturen, insbesondere bei unvermischten Stromführungen. Im Eintrittsquerschnitt der Wärmeübertrager werden immer einheitliche Temperaturen ange-

nommen. Austrittstemperaturen werden berechnet, indem angenommen wird, daß die Fluidteilchen im Austrittsquerschnitt adiabat vermischt werden.

Um die Rand- und Kopplungsbedingungen als Gleichungen zu formulieren, sind in Abb. 4.4 die Koordinatensysteme der Wärmeübertrager und Verbindungsleitungen dargestellt.

In Abb. 4.4 sind Pumpe und Stellventil nicht dargestellt, vgl. Abb. 1.1. In der vorliegenden Arbeit wird das thermische Verhalten des zusammengeschalteten Systems untersucht. Nach Abschnitt 4.1 sind die Berechnung des thermischen und hydraulischen Verhaltens unabhängig voneinander. Für die Berechnung des thermischen Verhaltens werden Pumpe und Stellventil daher vereinfachend modelliert.

Anstelle von Pumpe und Stellventil wird die Verbindungsleitung so verlängert, daß die Verweilzeit der Fluidteilchen im System aus Pumpe und Stellventil richtig wiedergegeben wird. Es wird angenommen, daß Pumpe und Stellventil adiabat sind und daß die Wärmekapazitäten der beiden Systeme so näherungsweise richtig erfaßt werden.

Die Berechnung des hydraulischen Verhaltens eines Systems, das aus Pumpe, Stellventil und Strömungskanälen besteht, wird von Buckley [36] dargestellt.

Für zwei gekoppelte Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit quervermischem Umlaufstrom gelten mit den Bezeichnungen in Abb. 4.4 die Gln. 4.94 bis 4.105.

Randbedingungen im stationären Ausgangszustand für die beiden Hauptströme:

$$\bar{\theta}_{1I}(\xi_I = 0, \eta_I) = \bar{\theta}_{1, \text{ein}I} = 1 \quad (4.94)$$

$$\bar{\theta}_{1II}(\xi_{II} = 0, \eta_{II}) = \bar{\theta}_{1, \text{ein}II} = 0 \quad (4.95)$$

Kopplungsbedingungen im stationären Ausgangszustand für das umlaufende Fluid:

$$\bar{\theta}_{2I}(\eta_I = 1) = \bar{\theta}_{2r}(\zeta_r = 0) \quad (4.96)$$

$$\bar{\theta}_{2r}(\zeta_r = 1) = \bar{\theta}_{2II}(\eta_{II} = 0) \quad (4.97)$$

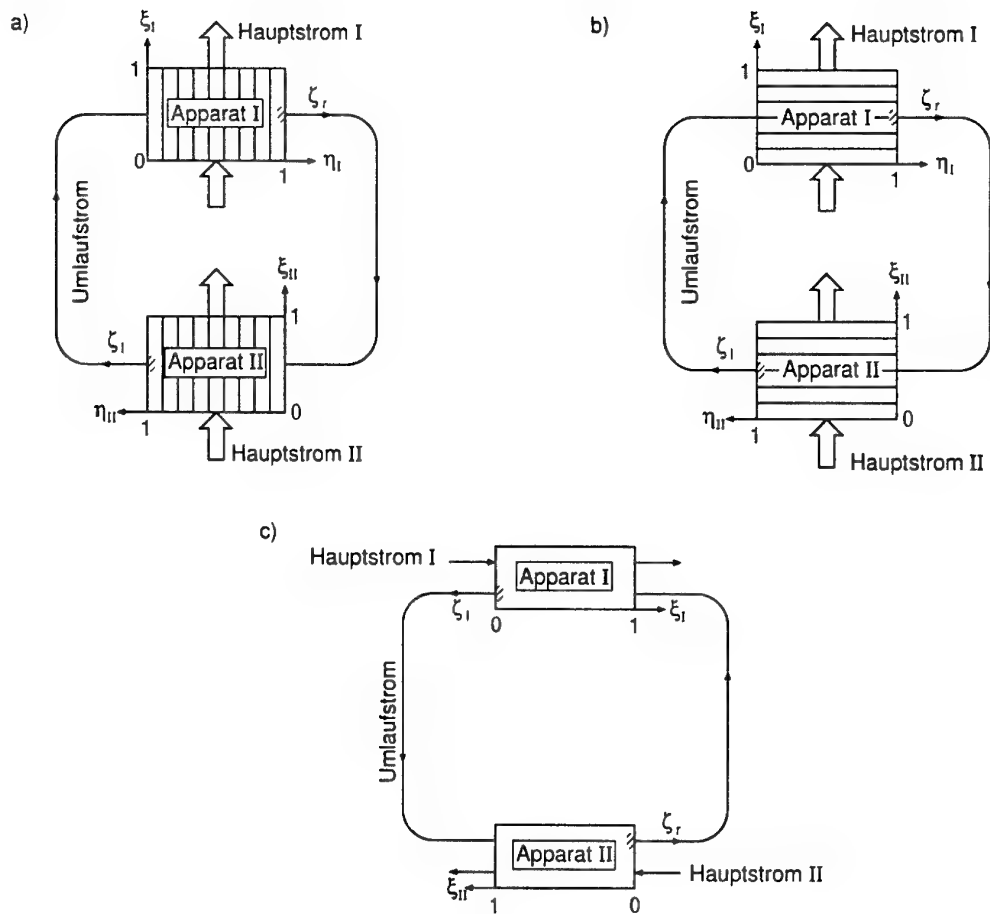
$$\bar{\theta}_{2II}(\eta_{II} = 1) = \bar{\theta}_{2l}(\zeta_l = 0) \quad (4.98)$$

$$\bar{\theta}_{2l}(\zeta_l = 1) = \bar{\theta}_{2I}(\eta_I = 0) \quad (4.99)$$

Randbedingungen für die Temperaturschwankungen der beiden Hauptströme:

$$\theta'_{1I}(\xi_I = 0, \eta_I, \tau) = \theta'_{1, \text{ein}I}(\tau) \quad (4.100)$$

$$\theta'_{1II}(\xi_{II} = 0, \eta_{II}, \tau) = \theta'_{1, \text{ein}II}(\tau) \quad (4.101)$$



**Abb. 4.4.** Koordinatensysteme und Stromführung für die drei in dieser Arbeit berechneten Systeme: a) einseitig quervermischter Kreuzstrom mit quervermischem Umlaufstrom, b) einseitig quervermischter Kreuzstrom mit quervermischten Hauptströmen (der Umlaufstrom ist den Wärmeübertragern unvermischt), c) Gegenstrom.

Kopplungsbedingungen für die Temperaturschwankungen des umlaufenden Fluids:

$$\theta'_{2I}(\eta_I = 1, \tau) = \theta'_{2r}(\zeta_r = 0, \tau) \quad (4.102)$$

$$\theta'_{2r}(\zeta_r = 1, \tau) = \theta'_{2II}(\eta_{II} = 0, \tau) \quad (4.103)$$

$$\theta'_{2II}(\eta_{II} = 1, \tau) = \theta'_{2l}(\zeta_l = 0, \tau) \quad (4.104)$$

$$\theta'_{2l}(\zeta_l = 1, \tau) = \theta'_{2I}(\eta_I = 0, \tau) \quad (4.105)$$

Für zwei gekoppelte Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit quervermischten Hauptströmen gelten mit den Bezeichnungen in Abb. 4.4 die Gln. 4.106 bis 4.117.

Randbedingungen im stationären Ausgangszustand für die beiden Hauptströme:

$$\bar{\theta}_{1I}(\xi_I = 0) = \bar{\theta}_{1,einI} = 1 \quad (4.106)$$

$$\bar{\theta}_{1II}(\xi_{II} = 0) = \bar{\theta}_{1,einII} = 0 \quad (4.107)$$

Kopplungsbedingungen im stationären Ausgangszustand für das umlaufende Fluid:

$$\int_0^1 \bar{\theta}_{2I}(\xi_I, \eta_I = 1) d\xi_I = \bar{\theta}_{2r}(\zeta_r = 0) \quad (4.108)$$

$$\bar{\theta}_{2r}(\zeta_r = 1) = \bar{\theta}_{2II}(\xi_{II}, \eta_{II} = 0) \quad (4.109)$$

$$\int_0^1 \bar{\theta}_{2II}(\xi_{II}, \eta_{II} = 1) d\xi_{II} = \bar{\theta}_{2l}(\zeta_l = 0) \quad (4.110)$$

$$\bar{\theta}_{2l}(\zeta_l = 1) = \bar{\theta}_{2I}(\xi_I, \eta_I = 0) \quad (4.111)$$

Randbedingungen für die Temperaturschwankungen der beiden Hauptströme:

$$\theta'_{1I}(\xi_I = 0, \tau) = \theta'_{1,einI}(\tau) \quad (4.112)$$

$$\theta'_{1II}(\xi_{II} = 0, \tau) = \theta'_{1,einII}(\tau) \quad (4.113)$$

Kopplungsbedingungen für die Temperaturschwankungen des umlaufenden Fluids:

$$\int_0^1 \theta'_{2I}(\xi_I, \eta_I = 1, \tau) d\xi_I = \theta'_{2r}(\zeta_r = 0, \tau) \quad (4.114)$$

$$\theta'_{2r}(\zeta_r = 1, \tau) = \theta'_{2II}(\xi_{II}, \eta_{II} = 0, \tau) \quad (4.115)$$

$$\int_0^1 \theta'_{2II}(\xi_{II}, \eta_{II} = 1, \tau) d\xi_{II} = \theta'_{2l}(\zeta_l = 0, \tau) \quad (4.116)$$

$$\theta'_{2l}(\zeta_l = 1, \tau) = \theta'_{2I}(\xi_I, \eta_I = 0, \tau) \quad (4.117)$$

Für zwei gekoppelte Gegenstrom-Wärmeübertrager gelten mit den Bezeichnungen in Abb. 4.4 die Gln. 4.118 bis 4.129.

Randbedingungen im stationären Ausgangszustand für die beiden Hauptströme:

$$\bar{\theta}_{1I}(\xi_I = 0) = \bar{\theta}_{1, \text{ein}I} = 1 \quad (4.118)$$

$$\bar{\theta}_{1II}(\xi_{II} = 0) = \bar{\theta}_{1, \text{ein}II} = 0 \quad (4.119)$$

Kopplungsbedingungen im stationären Ausgangszustand für das umlaufende Fluid:

$$\bar{\theta}_{2I}(\xi_I = 0) = \bar{\theta}_{2I}(\zeta_I = 0) \quad (4.120)$$

$$\bar{\theta}_{2I}(\zeta_I = 1) = \bar{\theta}_{2II}(\xi_{II} = 1) \quad (4.121)$$

$$\bar{\theta}_{2II}(\xi_{II} = 0) = \bar{\theta}_{2r}(\zeta_r = 0) \quad (4.122)$$

$$\bar{\theta}_{2r}(\zeta_r = 1) = \bar{\theta}_{2I}(\xi_I = 1) \quad (4.123)$$

Randbedingungen für die Temperaturschwankungen der beiden Hauptströme:

$$\theta'_{1I}(\xi_I = 0, \tau) = \theta'_{1, \text{ein}I}(\tau) \quad (4.124)$$

$$\theta'_{1II}(\xi_{II} = 0, \tau) = \theta'_{1, \text{ein}II}(\tau) \quad (4.125)$$

Kopplungsbedingungen für die Temperaturschwankungen des umlaufenden Fluids:

$$\theta'_{2I}(\xi_I = 0, \tau) = \theta'_{2I}(\zeta_I = 0, \tau) \quad (4.126)$$

$$\theta'_{2r}(\zeta_I = 1, \tau) = \theta'_{2II}(\xi_{II} = 1, \tau) \quad (4.127)$$

$$\theta'_{2II}(\xi_{II} = 0, \tau) = \theta'_{2r}(\zeta_r = 0, \tau) \quad (4.128)$$

$$\theta'_{2I}(\zeta_r = 1, \tau) = \theta'_{2I}(\xi_I = 1, \tau) \quad (4.129)$$

## 4.11 Stationäre Temperaturfelder

In den inhomogenen Anteilen der exakten und linearisierten Energiegleichungen. Anh. B, stehen die Temperaturen des stationären Ausgangszustands. Diese müssen bekannt sein, bevor damit begonnen werden kann, das instationäre Verhalten des Systems zu untersuchen.

Jeder Wärmeübertrager wird im stationären Ausgangszustand durch zwei Differentialgleichungen für die Fluidströme und eine algebraische Gleichung für die wärmeübertragende Wand beschrieben, Anh. A.1, A.2 und A.3. Die beiden Verbindungsleitungen werden durch eine Differentialgleichung für den umlaufenden Fluidstrom und eine algebraische Gleichung für die Rohrwand beschrieben, Anh. A.4. Hinzu treten die zwei Randbedingungen und die vier Kopplungsbedingungen aus Abschnitt 4.10.

Dieses umfangreiche Problem wird gelöst, indem jedes Untersystem zunächst isoliert berechnet wird, wobei die unbekannten dimensionslosen Eintrittstemperaturen des umlaufenden Fluids  $\bar{\theta}_{2,einI}$ ,  $\bar{\theta}_{2,einII}$ ,  $\bar{\theta}_{2,einr}$ ,  $\bar{\theta}_{2,einl}$ , als Randbedingung vorgegeben werden und zunächst unbestimmt bleiben, Anh. A.1 bis A.4.

Anschließend wird mit Hilfe der Kopplungsbedingungen aus Abschnitt 4.10 ein Gleichungssystem aufgestellt, mit dem die unbekannten dimensionslosen Eintrittstemperaturen des umlaufenden Fluids berechnet werden. Diese sind tabellarisch in Anh. A.5 zusammengestellt.



## 5 Berechnung des instationären Verhaltens mit der Laplace-Transformation

In dieser Arbeit werden zwei verschiedene Methoden verwendet, um die exakten und linearisierten Energiegleichungen zusammen mit ihren Anfangs-, Rand- und Kopplungsbedingungen zu lösen, und zwar die Laplace-Transformation und das Finite-Differenzen-Verfahren. Zunächst wird die Laplace-Transformation vorgestellt.

Die Laplace-Transformierte einer Funktion  $f(\tau)$  im Intervall  $0 \leq \tau < \infty$  ist durch Gl. 5.1 definiert [37]:

$$\mathcal{L}\{f(\tau)\} = \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau. \quad (5.1)$$

Die exakten und linearisierten Energiegleichungen, die Randbedingungen und die Kopplungsbedingungen werden bezüglich der dimensionslosen Zeit transformiert. Die Regeln für die Transformation sind von Spiegel zusammengestellt worden [38]. Durch diese Transformation gehen die Gleichungen vom Zeitbereich in den Frequenzbereich über.

Die exakten Energiegleichungen werden nur für die Fälle transformiert, in denen ihre Koeffizienten konstant sind. Physikalisch bedeuten konstante Koeffizienten in den exakten Energiegleichungen, daß Prozesse beschrieben werden, bei denen die Massenströme aller drei Fluide konstant sind oder sich sprunghaft zum Zeitpunkt  $\tau = 0$  ändern.

Die linearisierten Energiegleichungen besitzen immer konstante Koeffizienten.

Nur wenn die Differentialgleichungen im Zeitbereich konstante Koeffizienten besitzen, ist die Anwendung der Laplace-Transformation sinnvoll: Im Zeitbereich treten partielle Ableitungen nach allen dimensionslosen Ortskoordinaten und der dimensionslosen Zeitkoordinate auf, Anh. B. Bei konstanten Koeffizienten im Zeitbereich treten im Frequenzbereich nur noch partielle Ableitungen nach den dimensionslosen Ortskoordinaten auf, Anh. C. Die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen, nach denen partiell abgeleitet wird, hat sich beim Übergang vom Zeitbereich in den Frequenzbereich um 1 verringert. Die Differentialgleichungen im Frequenzbereich können dann analytisch mit

den Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen gelöst werden. Dies ist Anh. C dargestellt.

Wenn die Koeffizienten der exakten Energiegleichungen zeitabhängig sind, ist eine Transformation für Sonderfälle möglich [38], aber dann treten partielle Ableitungen nach allen dimensionslosen Ortskoordinaten und nach der Variablen  $s$  auf, statt nach der Variablen  $\tau$ , z.B.

$$\mathcal{L}\left(\tau \frac{\partial \theta'(\xi, \tau)}{\partial \xi}\right) = -\frac{\partial^2 \tilde{\theta}'(\xi, s)}{\partial \xi \partial s} \quad (5.2)$$

oder

$$\mathcal{L}(\tau \theta'(\xi, \tau)) = -\frac{\partial \tilde{\theta}'(\xi, s)}{\partial s}. \quad (5.3)$$

Die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen, nach denen partiell abgeleitet wird, verringert sich nicht. Da sich die Struktur der Differentialgleichungen nicht vereinfacht, ist die Anwendung der Laplace-Transformation nicht sinnvoll.

In einem letzten Schritt wird die Lösung vom Frequenzbereich in den Zeitbereich zurücktransformiert. Grundlage hierfür ist das Inversionstheorem für die Laplace-Transformation, das aus folgendem Gleichungspaar besteht [37]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad \Re(s) > c, \quad (5.4)$$

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{f}(s) e^{s\tau} ds, \quad \gamma > c. \quad (5.5)$$

Aus diesem Theorem hat Honig [39] einen Algorithmus zur numerischen Inversion der Laplace-Transformation entwickelt, der in der vorliegenden Arbeit verwendet wird. Das Inversionsintegral, Gl. 5.5, wird in eine Fourier-Reihe entwickelt, und es werden konvergenzbeschleunigende Methoden angewendet. Die numerische Inversion mit Hilfe einer Fourier-Reihe wird von Roetzel und Xuan [3] verwendet und empfohlen.

## 6 Berechnung des instationären Verhaltens mit dem Finite-Differenzen-Verfahren

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, wie die Laplace-Transformation verwendet wird, um partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Ihr Einsatz ist nur in diesem Fall sinnvoll. Um die exakten Energiegleichungen zu lösen, deren Koeffizienten Zeitfunktionen sind, wird eine andere Methode benötigt. In der vorliegenden Arbeit wird ein explizites Finite-Differenzen-Verfahren verwendet.

### 6.1 Aufbau des Rechnernetzes

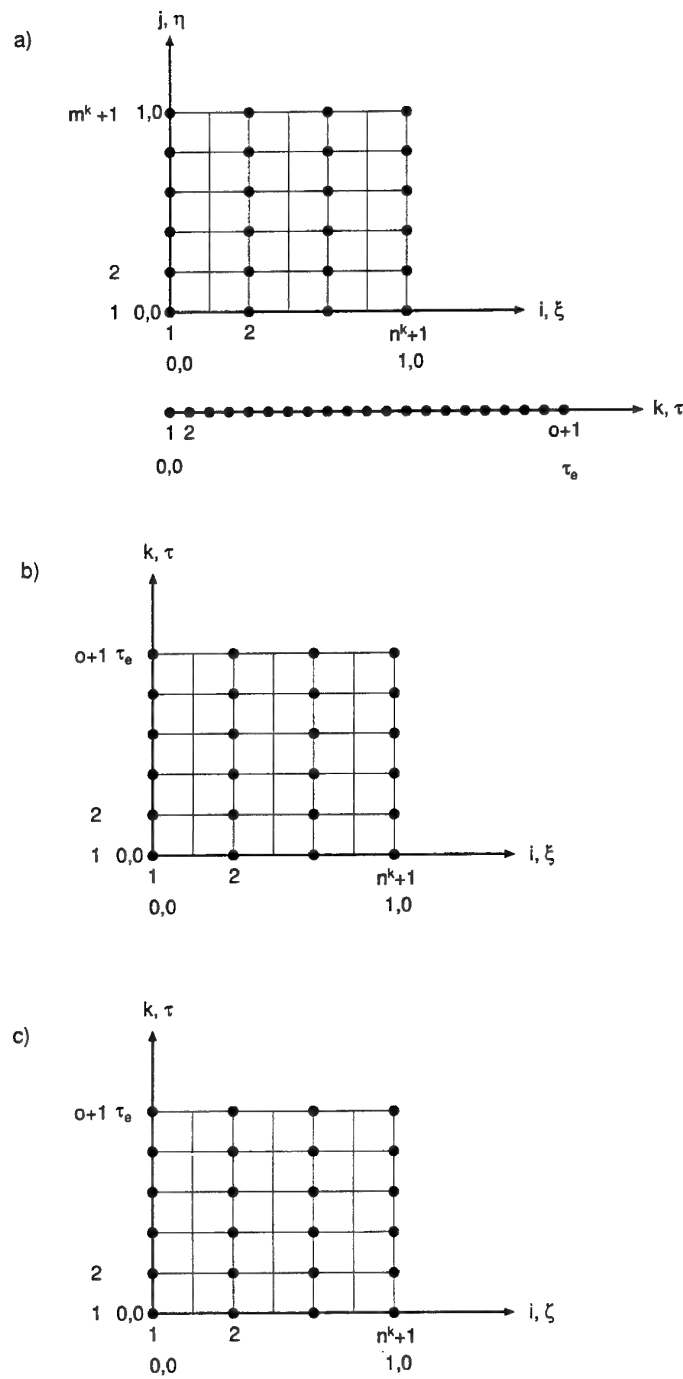
Beim Finite-Differenzen-Verfahren werden die exakten Energiegleichungen, Anh. B, durch finite Differenzengleichungen approximiert, d.h. die einzelnen Terme der exakten Energiegleichungen werden mit Hilfe von Werten an den diskreten Punkten eines Rechnernetzes ausgedrückt.

Der Aufbau des Rechnernetzes wird am Beispiel des Kreuzstrom-Wärmeübertragers, dessen Temperaturfelder zweidimensional sind, dargestellt, Abb. 6.1a. In der Abbildung sind Ortsdiskretisierung und Zeitdiskretisierung getrennt dargestellt.

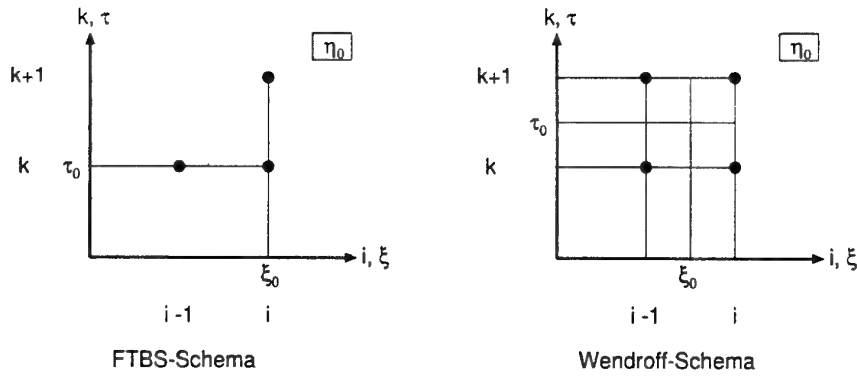
Bei der Ortsdiskretisierung wird die in beiden Koordinatenrichtungen  $\xi$  und  $\eta$  zu 1 normierte Länge des Wärmeübertragers in  $n^k$  bzw.  $m^k$  äquidistante Intervalle  $\Delta\xi^k$  bzw.  $\Delta\eta^k$  unterteilt. Der hochgestellte Laufindex  $k$  zeigt an, daß bei dem verwendeten Verfahren die räumliche Unterteilung des Rechengebiets von Zeitschritt zu Zeitschritt verändert wird, wenn Massenstromschwankungen auftreten. Im Zeitschritt  $k$  werden die Schwankungen der dimensionslosen Temperaturen zum Zeitpunkt  $k+1$  aus den Werten zum Zeitpunkt  $k$  berechnet. Im folgenden ist zwischen Zeitschritt  $k$  und Zeitpunkt  $k$  zu unterscheiden.

Die Abstände der Gitterpunkte in  $\xi$  und  $\eta$ -Richtung sind durch  $\Delta\xi^k = \frac{1}{n^k}$  und  $\Delta\eta^k = \frac{1}{m^k}$  gegeben. Die Ortskoordinaten an den Gitterpunkten  $(i, j)$  sind durch die Gln. 6.1 und 6.2 gegeben:

$$\xi_{i,j}^k = (i-1)\Delta\xi^k \quad i = 1, \dots, n^k + 1, \quad j = 1, \dots, m^k + 1 \quad (6.1)$$



**Abb. 6.1.** Rechnernetze: a) Kreuzstrom-Wärmeübertrager (zweidimensional), b) Gegenstrom-Wärmeübertrager (eindimensional) und c) Verbindungsleitungen (eindimensional). Es ist dargestellt, wie die diskreten Punkte des Rechnernetzes im kontinuierlichen Koordinatensystem liegen.



**Abb. 6.2.** Entwicklungspunkt  $(\xi_0, \eta_0, \tau_0)$  der Taylorreihe für die beiden Differenzenschemen. Links: Beim FTBS-Schema (forward time backward space) fällt der Entwicklungspunkt mit einem Gitterpunkt zusammen. Rechts: Beim Wendroff-Schema ist der Entwicklungspunkt ein Zwischengitterpunkt.

$$\eta_{i,j}^k = (j-1)\Delta\eta^k \quad i = 1, \dots, n^k + 1, \quad j = 1, \dots, m^k + 1. \quad (6.2)$$

Der Prozeß wird für den Zeitraum  $0 \leq \tau \leq \tau_e$  berechnet, der in  $o$  äquidistante Zeitintervalle  $\Delta\tau$  unterteilt wird. Die Zeitschrittweite beträgt

$$\Delta\tau = \frac{\tau_e - 0}{o}. \quad (6.3)$$

Zum Zeitpunkt  $k$  gilt

$$\tau^k = (k-1)\Delta\tau, \quad k = 1, \dots, o+1. \quad (6.4)$$

## 6.2 Approximation der exakten Energiegleichungen durch finite Differenzengleichungen

Um darzustellen, wie die exakten Energiegleichungen durch finite Differenzengleichungen approximiert werden, wird das Rechengitter in Abb. 6.2 betrachtet. Von besonderem Interesse ist der Entwicklungspunkt  $(\xi_0, \eta_0, \tau_0)$  für das Differenzenschema.

Für das sogenannte FTBS-Schema [40] fällt der Entwicklungspunkt mit einem Gitterpunkt  $(i, j, k)$ , Abb. 6.2 links. Beim Wendroff-Schema [35] wird ein Zwischengitterpunkt als Entwicklungspunkt gewählt, Abb. 6.2 rechts.

**Tabelle 6.1.** Beziehungen für die Bildung von finite Differenzengleichungen. Das FTBS-Schema unterscheidet sich durch den Entwicklungspunkt  $(\xi_0, \eta_0, \tau_0)$  vom Wendroff-Schema. In der ersten Zeile jedes Kastens steht der Ausdruck, der für die finite Differenzengleichungen verwendet wird. Falls weitere Zeilen in einem Kasten folgen, steht hier der Diskretisierungsfehler. Für  $\eta^*$  im Diskretisierungsfehler der Linienintegrale gilt  $0 \leq \eta^* \leq 1$  [41].

	FTBS-Schema	Wendroff-Schema
	Gitterpunkt $\xi_0 = (i-1)\Delta\xi^k$ $\eta_0 = (j-1)\Delta\eta^k$ $\tau_0 = (k-1)\Delta\tau$	Zwischengitterpunkt $\xi_0 = ([i - \frac{1}{2}] - 1)\Delta\xi^k$ $\eta_0 = (j-1)\Delta\eta^k$ $\tau_0 = ([k + \frac{1}{2}] - 1)\Delta\tau$
$\theta'$	$\theta'_{i,j}$	$\frac{1}{4}(\theta'_{i-1,j} + \theta'_{i,j} + \theta'_{i,j} + \theta'_{i,j}^{k+1})$ $- \frac{1}{8} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \xi^2} \Big _{\xi_0, \eta_0} (\Delta\xi^k)^2 - \frac{1}{8} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \tau^2} \Big _{\xi_0, \eta_0} \Delta\tau^2$ $+$ ...
$\frac{\partial \theta'}{\partial \xi}$	$\frac{\theta'_{i,j} - \theta'_{i-1,j}}{\Delta\xi^k}$ $+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \xi^2} \Big _{\xi_0, \eta_0} \Delta\xi^k + \dots$	$\frac{1}{2} \frac{\theta'_{i,j} - \theta'_{i-1,j}}{\Delta\xi^k} + \frac{1}{2} \frac{\theta'_{i,j} - \theta'_{i-1,j}}{\Delta\xi^k}$ $- \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \xi^3} \Big _{\xi_0, \eta_0} (\Delta\xi^k)^2 - \frac{1}{8} \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \xi \partial \tau^2} \Big _{\xi_0, \eta_0} \Delta\tau^2$ $+$ ...
$\frac{\partial \theta'}{\partial \tau}$	$\frac{\theta'_{i,j}^{k+1} - \theta'_{i,j}}{\Delta\tau}$ $- \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \tau^2} \Big _{\xi_0, \eta_0} \Delta\tau + \dots$	$\frac{1}{2} \frac{\theta'_{i,j}^{k+1} - \theta'_{i,j}}{\Delta\tau} + \frac{1}{2} \frac{\theta'_{i,j}^{k+1} - \theta'_{i,j}}{\Delta\tau}$ $- \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \tau^3} \Big _{\xi_0, \eta_0} \Delta\tau^2 - \frac{1}{8} \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \xi^2 \partial \tau} \Big _{\xi_0, \eta_0} (\Delta\xi^k)^2$ $+$ ...
$\int_0^1 \theta' d\eta$	$\frac{\sum_{j=1}^{m+1} \theta'_{i,j}}{m}$ $- \frac{(\Delta\eta^k)^2}{12} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \eta^2} \Big _{\xi_0} (\eta^*) + \dots$	$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m+1} \left\{ \frac{1}{4}(\theta'_{i-1,j} + \theta'_{i,j} + \theta'_{i,j} + \theta'_{i,j}^{k+1}) \right.$ $- \frac{1}{8} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \xi^2} \Big _{\xi_0, \eta_0} (\Delta\xi^k)^2 - \frac{1}{8} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \tau^2} \Big _{\xi_0, \eta_0} \Delta\tau^2 \Big\}$ $- \frac{(\Delta\eta^k)^2}{12} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \eta^2} \Big _{\xi_0} (\eta^*) + \dots$
$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}_{i,j} = \bar{\theta} [(i-1)\Delta\xi^k, (j-1)\Delta\eta^k]$	$\bar{\theta}_{i-\frac{1}{2},j} = \bar{\theta} ([i - \frac{1}{2}] - 1)\Delta\xi^k, (j-1)\Delta\eta^k]$
$\int_0^1 \bar{\theta} d\eta$	$\frac{\sum_{j=1}^{m+1} \bar{\theta}_{i,j}}{m}$ $- \frac{(\Delta\eta^k)^2}{12} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \eta^2} \Big _{\xi_0} (\eta^*) + \dots$	$\frac{\sum_{j=1}^{m+1} \bar{\theta}_{i-\frac{1}{2},j}}{m}$ $- \frac{(\Delta\eta^k)^2}{12} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \eta^2} \Big _{\xi_0} (\eta^*) + \dots$
$\sigma$	$\sigma^k = \sigma [(k-1)\Delta\tau]$	$\sigma^{k+\frac{1}{2}} = \sigma ([k + \frac{1}{2}] - 1)\Delta\tau]$
$N'$	$N'^k = N' [(k-1)\Delta\tau]$	$N'^{k+\frac{1}{2}} = N' ([k + \frac{1}{2}] - 1)\Delta\tau]$

Die Koeffizienten und der inhomogene Anteil der exakten Energiegleichungen lassen sich an dem Punkt  $(\xi_0, \eta_0, \tau_0)$  exakt vor Beginn des eigentlichen Verfahrens berechnen.

Die Orts- und Zeitableitungen der Temperaturschwankungen werden an dem Punkt  $(\xi_0, \eta_0, \tau_0)$  mit Hilfe der Werte an den umliegenden Gitterpunkten approximiert. Dazu wird die Temperaturschwankung an dem Punkt  $(\xi_0, \eta_0, \tau_0)$  in eine Taylorreihe entwickelt. Anschließend wird die Methode der unbestimmten Koeffizienten [40] angewendet. Die Ergebnisse sind in Tab. 6.1 wiedergegeben.

Bei der Approximation der Linienintegrale wird die Trapezregel verwendet. Mit  $\Sigma''$  wird in den Formeln die halbe Gewichtung des ersten und letzten Summanden bezeichnet [25].

Die Ausdrücke in Tab. 6.1 bestehen z.T. aus mehreren Zeilen. In der ersten Zeile steht jeweils der Ausdruck, der für die Bildung der finite Differenzengleichungen verwendet wird. Wenn weitere Zeilen folgen, steht hier der Diskretisierungsfehler [40].

Mit den finite Differenzengleichungen lassen sich Temperaturfelder von Prozessen mit beliebigen Massenstromschwankungen berechnen. Die Differenzengleichungen sind in Anh. D zusammengestellt.

Um ein explizites Finite-Differenzen-Verfahren mit einem möglichst kleinen mittleren Diskretisierungsfehler zu erhalten, werden in dieser Arbeit in jedem Zeitschritt beide Differenzenschemen kombiniert, Anh. D.

Ein wichtiger Sonderfall liegt vor, wenn die Hauptströme gasförmig sind und der Umlaufstrom flüssig ist. In der Regel sind die Verweilzeiten der Gasteilchen im Wärmeübertrager sehr viel kleiner als die der Flüssigkeitsteilchen. Wählt man die Verweilzeit der Flüssigkeit in einem der Wärmeübertrager als Bezugszeit, verschwindet die Zeitableitung in der Energiegleichung. Beispielsweise gilt für den gasförmigen Hauptstrom des Gegenstrom-Wärmeübertragers

$$\begin{aligned}
 -(1 + \sigma_{1M}) \frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \xi_M} - (\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\theta'_{1M} - \theta'_{WM}) \\
 - (N'_{1M} - \sigma_{1M} \bar{N}_{1M})(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM}) = \underbrace{\kappa_{1M}}_{\frac{t_{v1M}}{t_B} \approx 0} \frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \tau}. \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

Das Verschwinden der Zeitableitung bedeutet, daß sich die Gastemperaturen zu jedem Zeitpunkt trägheitslos einstellen, wobei die Vorgeschichte bedeutungslos ist. Daher ist

die Approximation der Ortsableitung nach dem Wendroff-Schema, das zwei Zeitebenen miteinander verknüpft, nicht sinnvoll. Stattdessen wird die Drei-Punkte-Formel verwendet [40]:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \xi} = \frac{3\theta'_{i,j} - 4\theta'_{i-1,j} + 2\theta'_{i-2,j}}{2\Delta \xi^k} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \theta'}{\partial \xi^3} \bigg|_{\xi_0, \eta_0}^{T_0} (\Delta \xi^k)^2 + \dots \quad (6.6)$$

Die vollständigen Differenzengleichungen für den Fall gasförmiger Hauptströme sind in Anh. D angegeben.

### 6.3 Anfangs- und Randbedingungen

Die Anfangsbedingungen sind homogen, d.h. für  $k = 1$  werden die Schwankungen der dimensionslosen Temperaturen an allen Gitterpunkten gleich null gesetzt.

Als Randbedingungen werden die Schwankungen der dimensionslosen Eintrittstemperaturen der beiden Hauptströme I und II in das System vorgegeben, Gln. 6.7 bis 6.12.

Für zwei gekoppelte Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit quervermischem Umlaufstrom gilt

$$\theta'_{1I1,jI}{}^k = \theta'_{1,einI}(\tau^k) \quad jI = 1, \dots, m_I^k + 1, \quad k = 1, \dots, o + 1 \quad (6.7)$$

$$\theta'_{1II1,jII}{}^k = \theta'_{1,einII}(\tau^k) \quad jII = 1, \dots, m_{II}^k + 1, \quad k = 1, \dots, o + 1. \quad (6.8)$$

Für zwei gekoppelte Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit quervermischten Hauptströmen gilt

$$\theta'_{1I1}{}^k = \theta'_{1,einI}(\tau^k) \quad k = 1, \dots, o + 1 \quad (6.9)$$

$$\theta'_{1II1}{}^k = \theta'_{1,einII}(\tau^k) \quad k = 1, \dots, o + 1. \quad (6.10)$$

Für zwei gekoppelte Gegenstrom-Wärmeübertrager gilt

$$\theta'_{1I1}{}^k = \theta'_{1,einI}(\tau^k) \quad k = 1, \dots, o + 1 \quad (6.11)$$

$$\theta'_{1II1}{}^k = \theta'_{1,einII}(\tau^k) \quad k = 1, \dots, o + 1. \quad (6.12)$$

### 6.4 Kopplungsbedingungen

Wie die Kopplungsbedingungen in das Finite-Differenzen-Verfahren eingehen, ist in den Abb. 6.3, 6.4 und 6.5 gezeigt. Es ist jeweils das Rechnetz des Umlaufstroms



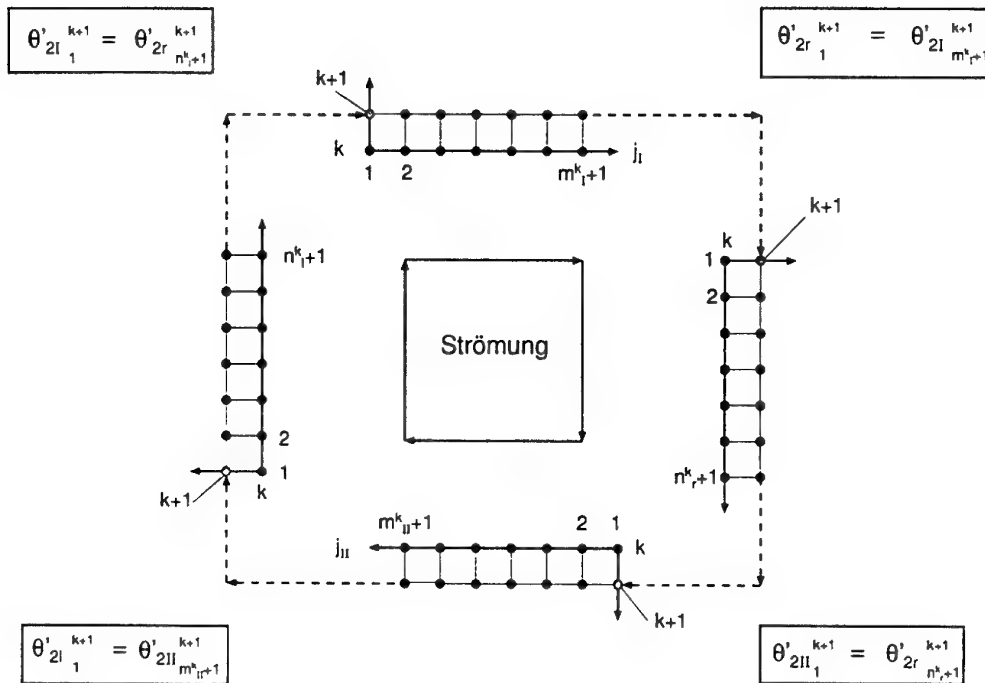


Abb. 6.3. Kopplungsbedingungen für den Umlaufstrom bei zwei zusammengeschalteten Kreuzstrom-Wärmeübertragern mit quervermishtem Umlaufstrom.

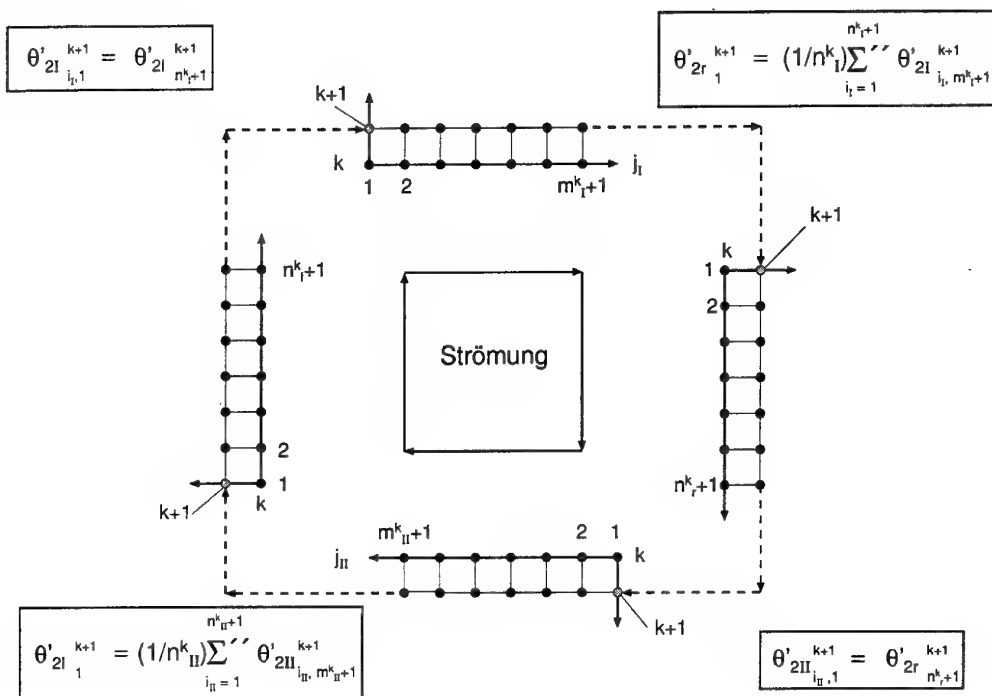


Abb. 6.4. Kopplungsbedingungen für den Umlaufstrom bei zwei zusammengeschalteten Kreuzstrom-Wärmeübertragern mit quervermischten Hauptströmen.

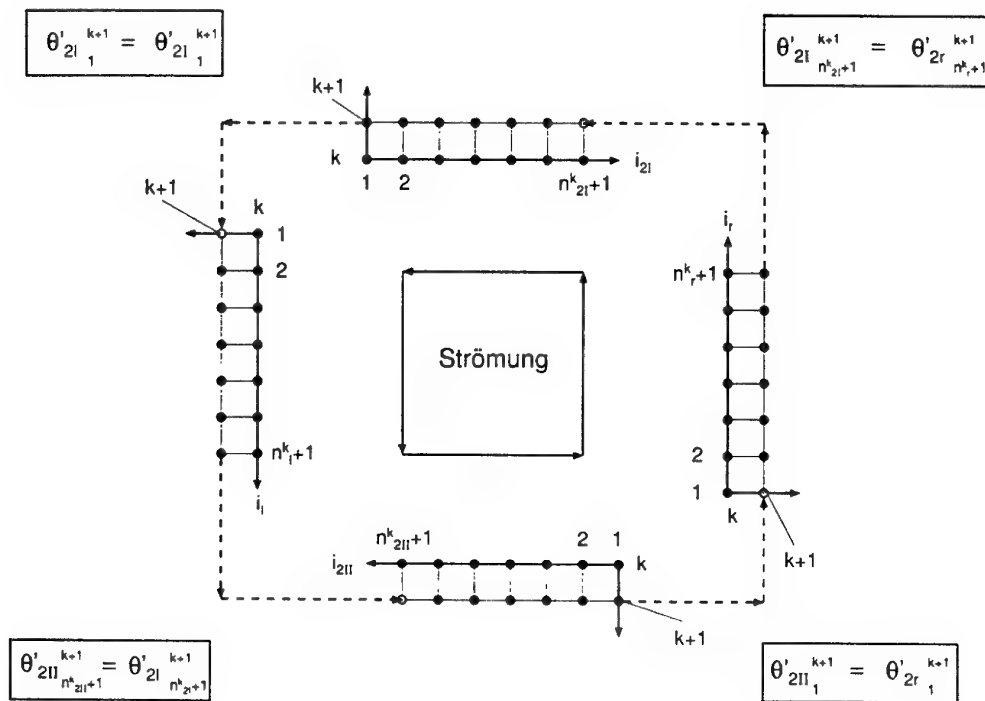


Abb. 6.5. Kopplungsbedingungen für den Umlaufstrom bei zwei zusammengeschalteten Gegenstrom-Wärmeübertragern.

für die Rechnung im Zeitschritt  $k$  dargestellt, d.h. aus den bekannten Werten zum Zeitpunkt  $k$  werden die neuen Werte zum Zeitpunkt  $k + 1$  berechnet.

Beim Kreuzstrom mit quervermischten Hauptströmen und unvermischem Umlaufstrom in den Einzelapparaten erstreckt sich das Rechnernetz des Umlaufstroms in den Wärmeübertragern auch in  $j$ -Richtung, Abb. 6.4. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist in Abb. 6.4 lediglich eine Ebene des Rechnernetzes mit  $j = \text{const}$  abgebildet.

Die vier Kopplungsbedingungen sind in den Ecken der Abbildungen 6.3, 6.4 und 6.5 angegeben. Die gestrichelten Pfeile zeigen an, wie die fehlende Eintrittstemperatur eines Untersystems mit der berechneten Austrittstemperatur des vorhergehenden Untersystems gleichgesetzt wird, Abb. 6.3, 6.4 und 6.5.

Zu Abb. 6.5 ist anzumerken, daß die Berechnung der Fluidtemperaturen immer in Strömungsrichtung erfolgen muß. So beginnt bei den Gegenstrom-Wärmeübertragern die Berechnung des Umlaufstroms am Gitterpunkt  $i = n^k + 1$  und endet am Gitterpunkt  $i = 1$ , wobei für die Berechnung eines neuen Punktes immer nur Gitterpunkte verwendet werden dürfen, die weiter stromaufwärts liegen. Dies spiegelt die physikalische Tatsache wider, daß sich Informationen mit der Strömung ausbreiten.

## 6.5 Netzgenerierung

Eine Stabilitätsuntersuchung der Differenzengleichungen für die wärmeübertragenden Wände und die Außenwände der Verbindungsleitungen liefert für jedes der vier Untersysteme eine obere Schranke für die Zeitschrittweite als notwendiges Stabilitätskriterium. Für die beiden Wärmeübertrager gilt für alle Zeitschritte  $k = 1, \dots, o + 1$

$$\Delta\tau < \frac{2\omega_M}{(\bar{N}_{1M} + N'_{1M}^k) + R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}^k)} \quad M = I, II, \quad (6.13)$$

und für die Verbindungsleitungen gilt

$$\Delta\tau < \frac{2\omega_M}{\bar{N}_{2M} + N'_{2M}^k} \quad M = r, l. \quad (6.14)$$

Mit den Ungleichungen 6.13 und 6.14 wird zunächst eine Zeitschrittweite für das gesamte Rechenverfahren festgelegt.

Da die Wandgleichungen keine Ortsableitungen enthalten, liefert ihre Untersuchung kein Kriterium für die Ortsdiskretisierung.

Neben dem Stabilitätsproblem, dessen Auftreten leicht zu erkennen ist, können numerische Dispersion und numerische Dämpfung die Berechnungsergebnisse unbrauchbar machen. Das Ziel ist, bei vorgegebener Zeitschrittweite die Schrittweiten in Ortsrichtung so festzulegen, daß die Auswirkungen von numerischer Dispersion und numerischer Dämpfung minimiert werden.

Um zu einem Kriterium für die Netzgenerierung zu gelangen, wird nicht das gesamte System gekoppelter partieller Differentialgleichungen bzw. Differenzengleichungen untersucht, sondern eine vereinfachte einzelne partielle Differentialgleichung. Sie erfaßt die Transporteigenschaften der Energiegleichungen in Strömungsrichtung der Fluide:

$$-(1 + \sigma) \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} = \kappa \frac{\partial \theta'}{\partial \tau}. \quad (6.15)$$

Die dimensionslose Schwankung der Strömungsgeschwindigkeit  $\sigma$  ist im Rahmen dieser Untersuchung eine Konstante, d.h. das Kriterium wird für einen Zeitschritt des Finite-Differenzen-Verfahrens hergeleitet, in dem mit  $\sigma^k = \sigma$  gerechnet wird. Falls sich die dimensionslose Schwankung der Strömungsgeschwindigkeit ändert, ergibt sich ein neues Kriterium, und es wird ein neues Rechnetz erzeugt.

Die Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung 6.15 mit den konstanten Koeffizienten  $(1 + \sigma)$  und  $\kappa$  setzt sich nach dem Superpositionsprinzip aus Teillösungen zusammen. Diese ergeben sich mit Hilfe des Separationsansatzes [35]. Sie haben die Gestalt

$$\theta' = \hat{\theta}' \exp [\mathcal{I} (\Omega \tau - \Lambda \xi)] \quad \text{mit} \quad \Omega = \frac{1 + \sigma}{\kappa} \Lambda. \quad (6.16)$$

Die Teillösungen für Gl. 6.15 sind nach Gl. 6.16 harmonische Wellen. Jede Welle ist durch ihre dimensionslose Kreisfrequenz  $\Omega$  und ihre dimensionslose Wellenzahl  $\Lambda$  charakterisiert. Gibt man für eine Teillösung die dimensionslose Kreisfrequenz vor, so ist die Wellenzahl durch Gl. 6.16 festgelegt. Die Teillösungen breiten sich alle ungedämpft mit der gleichen Geschwindigkeit

$$\frac{\Omega}{\Lambda} = \frac{1 + \sigma}{\kappa} = \text{const} \quad (6.17)$$

in positiver  $\xi$ -Richtung aus. Dieses Verhalten wird als dispersionsfrei bezeichnet.

Liegt bei einer partiellen Differentialgleichung Dispersion vor, so ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der verschiedenen Teillösungen unterschiedlich groß [40]:

$$\frac{\Omega}{\Lambda} = f(\Lambda) \neq \text{const}. \quad (6.18)$$

Liegt bei einer partiellen Differentialgleichung Dämpfung vor, so nimmt die Amplitude der Wellen mit der Zeit ab [40].

Da die exakten Teillösungen von Gl. 6.15 weder Dämpfung noch Dispersion aufweisen, soll das Rechnetz des Finite-Differenzen-Verfahrens möglichst so diskretisiert werden, daß dort auch keine Dämpfung und Dispersion auftritt.

### 6.5.1 Beziehung zwischen Kreisfrequenz und Wellenzahl beim FTBS-Schema

Das FTBS-Schema für Gl. 6.15 lautet

$$-(1 + \sigma^k) \frac{\theta_i'^k - \theta_{i-1}'^k}{\Delta \xi^k} = \kappa \frac{\theta_i'^{k+1} - \theta_i'^k}{\Delta \tau}. \quad (6.19)$$

In das Schema wird eine Teillösung eingesetzt, bei der der Zusammenhang zwischen  $\Lambda$  und  $\Omega$  zunächst unbestimmt ist:

$$\theta_i'^k = \hat{\theta}' \exp \left( \mathcal{I} \Omega (k-1) \Delta \tau - \mathcal{I} \Lambda (i-1) \Delta \xi^k \right). \quad (6.20)$$

Gleichung 6.20, in Gl. 6.19 eingesetzt, ergibt die diskrete Dispersionsbeziehung 6.21.

$$\Omega = \frac{\mathcal{I}}{\Delta \tau} \ln \left[ \left( 1 - \frac{1 + \sigma}{\kappa} \frac{\Delta \tau}{\Delta \xi^k} + \frac{1 + \sigma}{\kappa} \frac{\Delta \tau}{\Delta \xi^k} e^{\mathcal{I} \Lambda \Delta \xi^k} \right)^{-1} \right] \quad (6.21)$$

Gleichung 6.21 zeigt, daß sich bei einer willkürlichen Wahl von Ort- und Zeitschrittweite ein komplizierter Zusammenhang zwischen Wellenzahl und Kreisfrequenz ergibt, der in der Regel komplex ist. In diesem Fall treten numerische Dispersion und numerische Dämpfung auf.

Wenn in der diskreten Dispersionsbeziehung 6.21

$$\frac{\Delta \xi^k}{\Delta \tau} = \frac{1 + \sigma^k}{\kappa} \quad (6.22)$$

gewählt wird, haben alle Teillösungen der finiten Differenzengleichungen die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit wie die der partiellen Differentialgleichungen und sind wie diese ungedämpft. Es gilt

$$\frac{\Omega}{\Lambda} = \frac{1 + \sigma^k}{\kappa}. \quad (6.23)$$

Entsprechende Überlegungen gelten für das Wendroff-Schema.

### 6.5.2 Beziehung zwischen Kreisfrequenz und Wellenzahl beim Wendroff-Schema

Das Wendroff-Schema, das Gl. 6.15 approximiert, lautet

$$-(1 + \sigma^{k+\frac{1}{2}}) \frac{1}{2} \left[ \frac{\theta_i^k - \theta_{i-1}^k}{\Delta \xi^k} + \frac{\theta_i^{k+1} - \theta_{i-1}^{k+1}}{\Delta \xi^k} \right] = \kappa \frac{1}{2} \left[ \frac{\theta_i^{k+1} - \theta_i^k}{\Delta \tau} + \frac{\theta_{i-1}^{k+1} - \theta_{i-1}^k}{\Delta \tau} \right]. \quad (6.24)$$

Die diskrete Dispersionsbeziehung ergibt sich durch das Einsetzen von Gl. 6.20 in Gl. 6.24 zu

$$\Omega = \frac{\mathcal{I}}{\Delta \tau} \ln \left( \frac{1 + e^{\mathcal{I} \Lambda \Delta \xi^k} + \frac{1 + \sigma^{k+\frac{1}{2}}}{\kappa} \frac{\Delta \tau}{\Delta \xi^k} - \frac{1 + \sigma^{k+\frac{1}{2}}}{\kappa} \frac{\Delta \tau}{\Delta \xi^k} e^{\mathcal{I} \Lambda \Delta \xi^k}}{1 + e^{\mathcal{I} \Lambda \Delta \xi^k} - \frac{1 + \sigma^{k+\frac{1}{2}}}{\kappa} \frac{\Delta \tau}{\Delta \xi^k} + \frac{1 + \sigma^{k+\frac{1}{2}}}{\kappa} \frac{\Delta \tau}{\Delta \xi^k} e^{\mathcal{I} \Lambda \Delta \xi^k}} \right). \quad (6.25)$$

Durch die Wahl

$$\frac{\Delta \xi^k}{\Delta \tau} = \frac{1 + \sigma^{k+\frac{1}{2}}}{\kappa} \quad (6.26)$$

treten weder numerische Dispersion noch numerische Dämpfung auf. Es gilt

$$\frac{\Omega}{\Lambda} = \frac{1 + \sigma^{k+\frac{1}{2}}}{\kappa}. \quad (6.27)$$

Die Gln. 6.22 und 6.26 sind für das FTBS-Schema bzw. das Wendroff-Schema die Kriterien für die Netzgenerierung.

In der vorliegenden Arbeit wird in jedem Zeitschritt eine Kombination von FTBS-Schema und Wendroff-Schema verwendet. Die Kriterien für die Netzgenerierung eines Zeitschritts, Gl. 6.22 und Gl. 6.26, beinhalten jedoch den Parameter  $\sigma$  zu zwei verschiedenen Zeitpunkten, nämlich  $\sigma^k$  bzw.  $\sigma^{k+\frac{1}{2}}$ . Um ein einheitliches Kriterium zu erhalten, wird willkürlich der Parameter  $\sigma^{k+\frac{1}{2}}$  für die Netzgenerierung gewählt. Dies ist zulässig, wenn die Zeitschrittweite  $\Delta \tau$  klein gewählt wird.

Aus Gl. 6.26 wird zunächst die Anzahl der Intervalle in Ortsrichtung berechnet. Hier muß in der Regel gerundet werden, da die Anzahl der Intervalle eine natürliche Zahl sein muß. Mit

$$\Delta \xi^k = \frac{1}{n^k} \quad (6.28)$$

ergibt sich aus Gl. 6.26 die Anzahl der Intervalle in Ortsrichtung:

$$n^k = \frac{1}{\Delta \tau} \frac{\kappa}{1 + \sigma^{k+\frac{1}{2}}}, \quad (6.29)$$

wobei  $n^k$  ein gerundeter Wert ist. Im Rechenprogramm wird hierzu die Integer-Funktion INT verwendet [42]. Sie rundet, indem alle Nachkommastellen fortgelassen werden. Die tatsächlich vorliegende Ortsschrittweite ist dann der Kehrwert von  $n^k$ .

Beim Kreuzstrom gilt für die Ortsdiskretisierung in Strömungsrichtung des Hauptstroms

$$n^k = \frac{1}{\Delta \xi^k} = \text{INT} \left[ \frac{1}{\Delta \tau} \frac{\kappa_1}{1 + \sigma_1^{k+\frac{1}{2}}} \right] \quad (6.30)$$

und in Strömungsrichtung des Umlaufstroms

$$m^k = \frac{1}{\Delta \eta^k} = \text{INT} \left[ \frac{1}{\Delta \tau} \frac{\kappa_2}{1 + \sigma_2^{k+\frac{1}{2}}} \right]. \quad (6.31)$$

Für die Verbindungsleitung gilt

$$n^k = \frac{1}{\Delta \zeta^k} = \text{INT} \left[ \frac{1}{\Delta \tau} \frac{\kappa_2}{1 + \sigma_2^{k+\frac{1}{2}}} \right]. \quad (6.32)$$

Eine Besonderheit tritt beim Gegenstrom auf. Es ergeben sich zwei Kriterien für Diskretisierung der einzigen Ortskoordinate, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten der beiden Fluide unterschiedlich groß sind:

$$n^k = \frac{1}{\Delta \xi^k} = \text{INT} \left[ \frac{1}{\Delta \tau} \frac{\kappa_1}{1 + \sigma_1^{k+\frac{1}{2}}} \right] \quad (6.33)$$

$$n^k = \frac{1}{\Delta \xi^k} = \text{INT} \left[ \frac{1}{\Delta \tau} \frac{\kappa_2}{1 + \sigma_2^{k+\frac{1}{2}}} \right]. \quad (6.34)$$

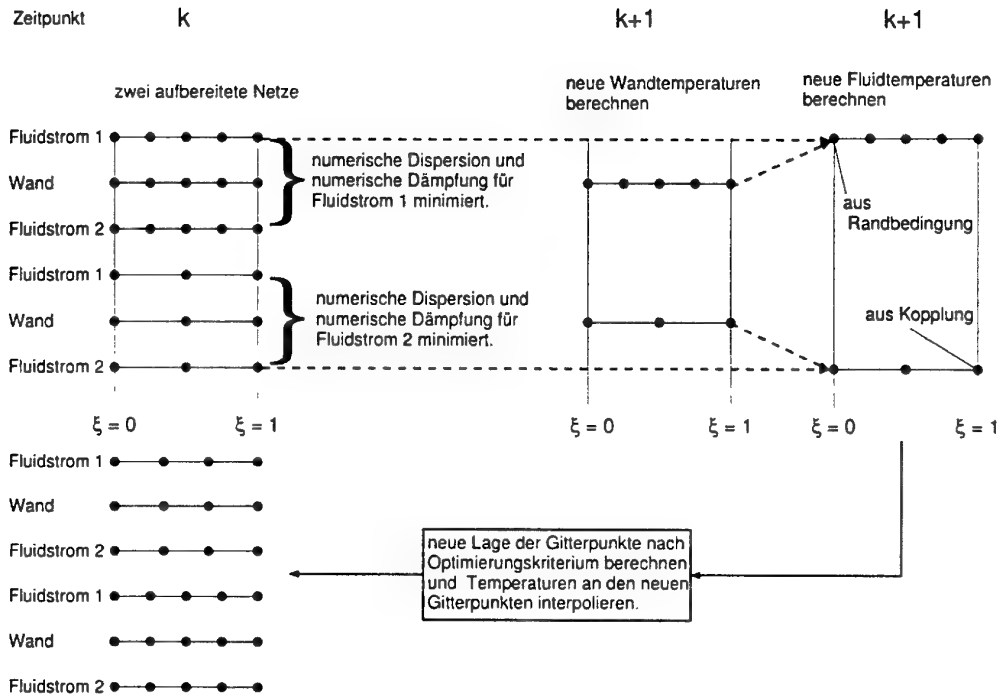
Beim Gegenstrom-Wärmeübertrager wird in jedem Zeitschritt auf zwei Netzen gerechnet. Die Vorgehensweise ist in Abb. 6.6 veranschaulicht.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist der Zeitpunkt  $k$ , für den alle Temperaturfelder bekannt sind. Es liegen zwei Rechennetze vor, wobei das eine in bezug auf numerische Dispersion und Dämpfung für den Fluidstrom 1 und das andere für den Fluidstrom 2 nach den Gln. 6.33 bzw. 6.34 optimiert ist.

Zunächst werden die Wandtemperaturen des neuen Zeitpunkts  $k + 1$  berechnet, wofür die Temperaturen der beiden Fluidströme und die Wandtemperaturen zum Zeitpunkt  $k$  benötigt werden.

Für den Fluidstrom 1 ist der Wert am Eintritt des Wärmeübertragers durch die Randbedingung vorgegeben. Mit den Fluid- und Wandtemperaturen zum Zeitpunkt  $k$  und





**Abb. 6.6.** Besonderheit beim Gegenstrom. Da die Strömungsgeschwindigkeiten der Fluidströme 1 und 2 in der Regel unterschiedlich groß sind, muß gleichzeitig auf zwei Netzen gerechnet werden, um die Auswirkungen von numerischer Dispersion und numerischer Dämpfung zu minimieren. Die Rechnung ist im Zeitschritt  $k$  dargestellt, d.h. mit Hilfe der bekannten Werte zum Zeitpunkt  $k$  werden neue Werte zum Zeitpunkt  $k + 1$  berechnet. Anschließend werden beide Rechennetze für die Berechnung des Zeitschritts  $k + 1$  aufbereitet.

der Fluidtemperatur am Eintritt zum Zeitpunkt  $k+1$  wird das gesamte Temperaturfeld des Fluids 1 bis zum Austritt mit dem Wendroff-Schema berechnet.

Beim Fluidstrom 2 wird ebenfalls in Strömungsrichtung, d.h. entgegen der Koordinatenrichtung, gerechnet, Abb. 6.5. Da keine Randbedingung am Fluideintritt vorliegt und die Kopplungsbedingungen erst verwendet werden können, wenn auch die Temperaturfelder der Verbindungsleitungen berechnet sind, wird die Berechnung des Wertes am Gitterpunkt  $i = n^k + 1$  zunächst offen gelassen, Abb. 6.5. Der Wert am Gitterpunkt  $i = n^k$  wird mit dem FTBS-Schema berechnet, das nur Werte zum Zeitpunkt  $k$  benötigt. Ab dem Gitterpunkt  $n^k - 1$  wird das Wendroff-Schema verwendet, das einen kleineren Diskretisierungsfehler besitzt.

Ist diese Berechnung abgeschlossen, wird der fehlende Wert der Temperatur des Fluidstroms 2 am Eintritt zum Zeitpunkt  $k+1$  mit der Kopplungsbedingung ergänzt, so daß schließlich sämtliche Fluidtemperaturen für den Zeitpunkt  $k+1$  bekannt sind, Abb. 6.5 und 6.6.

Für den Fall, daß sich die Massenströme und damit die Strömungsgeschwindigkeiten der Fluide ändern, wird bei der Berechnung des folgenden Zeitschritts  $k+1$  ein neues Rechennetz erzeugt, Abb. 6.6. Dazu werden die Ort- und Zeitschrittweiten nach den Optimierungskriterien 6.33 und 6.34 ermittelt. Die Temperaturen an den neuen Gitterpunkten werden aus den vorhandenen Werten interpoliert, so daß die Berechnung des neuen Zeitschritts erfolgen kann.

Die Berechnung der Kreuzstrom-Wärmeübertrager und der Verbindungsleitungen erfolgt nach dem gleichen Muster, wobei lediglich ein Rechennetz pro Zeitschritt verwendet wird.

## 7 Beispiele zum instationären Verhalten

Es werden die drei Systeme untersucht, die in Abb. 4.4 dargestellt sind. Aus der Abbildung geht hervor, welche Stromführung in den Wärmeübertragern vorliegt und mit welchen Ortskoordinaten die einzelnen Untersysteme beschrieben werden. In den Beispielen sind jeweils zwei identische Wärmeübertrager zusammengeschaltet, die durch zwei identische Rohrleitungen verbunden sind. Die Hauptströme sind gasförmig, das umlaufende Fluid ist eine Flüssigkeit. Im stationären Ausgangszustand sind die Wärmekapazitätsströme der beiden gasförmigen Hauptströme gleich groß. Damit das Problem vollständig beschrieben ist, werden die Kennzahlen der Energiegleichungen in Anh. B festgelegt.

Die Verweilzeit der Flüssigkeitsteilchen in den Wärmeübertragern ist sehr viel größer als die der Gasteilchen [12]:

$$t_{v2I} \gg t_{v1I} \quad (7.1)$$

$$t_{v2II} \gg t_{v1II}. \quad (7.2)$$

Wenn man die Verweilzeit der Flüssigkeitsteilchen  $t_{v2I}$  als Bezugszeit  $t_B$  wählt, können die dimensionslosen Verweilzeiten der Gasteilchen gleich null gesetzt werden:

$$\kappa_{1I} = \frac{t_{v1I}}{t_{v2I}} = 0 \quad (7.3)$$

$$\kappa_{1II} = \frac{t_{v1II}}{t_{v2I}} = 0. \quad (7.4)$$

Im stationären Ausgangszustand sind die dimensionslosen Verweilzeiten der Flüssigkeitsteilchen in beiden Wärmeübertragern gleich groß, da die beiden Wärmeübertrager identisch sind:

$$\kappa_{2I} = \frac{t_{v2I}}{t_{v2I}} = 1 \quad (7.5)$$

$$\kappa_{2II} = \frac{t_{v2II}}{t_{v2I}} = 1. \quad (7.6)$$

Für die dimensionslose Verweilzeit der Flüssigkeitsteilchen in den identischen Verbindungsleitungen wird gewählt:

$$\kappa_{2r} = \frac{t_{v2r}}{t_{v2I}} = 10 \quad (7.7)$$

$$\kappa_{2l} = \frac{t_{v2l}}{t_{v2I}} = 10. \quad (7.8)$$

Im stationären Ausgangszustand benötigen alle Flüssigkeitsteilchen des Umlaufstroms für einen Umlauf die dimensionslose Zeit

$$\begin{aligned} \tau_{v,tot} &= \kappa_{2I} + \kappa_{2r} + \kappa_{2l} + \kappa_{2II} \\ &= 1 + 10 + 1 + 10 \\ &= 22. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Alle Teilchen verbringen die gleiche Zeit in den einzelnen Untersystemen.

Für die Kennzahlen  $\bar{N} = \bar{\alpha}A/\bar{W}$  und die Wärmekapazitätsstromverhältnisse  $R_{2,1I}$  und  $R_{2,1II}$  werden folgende Zahlenwerte gewählt:

$$\bar{N}_{1I} = \bar{N}_{1II} = \bar{N}_1 = 8 \quad (7.10)$$

$$\bar{N}_{2I} = \bar{N}_{2II} = \bar{N}_2 = 12 \quad (7.11)$$

$$R_{2,1I} = R_{2,1II} = R_{2,1} = 4. \quad (7.12)$$

Die Kennzahlen  $\bar{N}_2$  und  $R_{2,1}$  hängen nach den Gln. 2.45 und 2.46 voneinander ab.

Aus den Gln. 7.10 bis 7.12 ergeben sich die  $NTU$ -Werte der beiden Wärmeübertrager:

$$NTU_1 = \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2 R_{2,1}}{\bar{N}_1 + \bar{N}_2 R_{2,1}} = 6,857. \quad (7.13)$$

Für die Verbindungsleitungen wird gewählt:

$$\bar{N}_{2r} = \bar{N}_{2l} = 1. \quad (7.14)$$

Weiterhin werden die Kennzahlen  $\omega_I$  und  $\omega_{II}$  in den Differentialgleichungen für die wärmeübertragenden Wände festgelegt. Für die identischen Einzelapparate gilt

$$\omega_I = \frac{C_{WI}}{C_{1I}} \kappa_{1I} \quad (7.15)$$

$$\omega_{II} = \omega_I. \quad (7.16)$$

Der Zahlenwert der dimensionslosen Verweilzeit  $\kappa_{1I}$  ist sehr klein und wurde in Gl. 7.3 gleich null gesetzt. Bei der Berechnung von  $\omega_I$  muß jedoch berücksichtigt werden, daß die Wärmekapazität der wärmeübertragenden Wand  $C_{WI}$  in der Regel sehr viel größer

ist als die Wärmekapazität des Gases  $C_{II}$ , das sich in dem Wärmeübertrager befindet [12]. Daher ergibt sich ein endlicher Wert für  $\omega_I$ . Für die Beispiele wird gewählt:

$$\omega_I = \omega_{II} = 5 \quad (7.17)$$

Für die Verbindungsleitungen sind die Kennzahlen  $\omega_r$  und  $\omega_l$  in den Differentialgleichungen für die Rohrwand, Anh. B, durch

$$\omega_r = \frac{C_{Wr}}{C_{2r}} \kappa_{2r} \quad (7.18)$$

$$\omega_r = \omega_l \quad (7.19)$$

gegeben. Für die Beispiele wird gewählt:

$$\omega_r = \omega_l = 1. \quad (7.20)$$

Der Exponent der Reynolds-Zahl im Potenzansatz für die Nußeltzahl, Gl. 4.66, geht ebenfalls in die Energiegleichungen ein. Er legt den Zusammenhang zwischen der Schwankung der Strömungsgeschwindigkeit und der des Wärmeübergangskoeffizienten fest. In den Beispielen wird für alle Untersysteme der Wert  $m = 0,8$  gewählt. Alle Kennzahlen für die Beispiele sind in Tab. 7.1 zusammengestellt.

Die fünf Eingangsgrößen, für die die Systemantwort ermittelt wird, sind

1. die Schwankung der dimensionslosen Eintrittstemperatur des warmen Hauptstroms,  $\theta'_{II, \text{ein}}$ ,
2. die Schwankung der dimensionslosen Eintrittstemperatur des kalten Hauptstroms,  $\theta'_{III, \text{ein}}$ ,
3. die dimensionslose Schwankung der Strömungsgeschwindigkeit des warmen Hauptstroms,  $\sigma_{II}$ ,
4. die dimensionslose Schwankung der Strömungsgeschwindigkeit des kalten Hauptstroms,  $\sigma_{III}$ , und
5. die dimensionslose Schwankung der Strömungsgeschwindigkeit des Umlaufstroms,  $\sigma_2$ .

**Tabelle 7.1.** Kennzahlen für die instationären Beispiele. Die drei Systeme, die in Abb. 4.4 dargestellt sind, besitzen in den Beispielen die aufgelisteten Kennzahlen. Im oberen Teil stehen die Kennzahlen für die Wärmeübertrager und im unteren Teil die für die Verbindungsleitungen. Die Bedeutung der Kennzahlen ist in der Auflistung der Formelzeichen und in Anh. B angegeben.

Kennzahl	Zahlenwert
$\bar{N}_{1I} = \bar{N}_{1II}$	8
$m_{1I} = m_{1II}$	0,8
$\bar{N}_{2I} = \bar{N}_{2II}$	12
$m_{2I} = m_{2II}$	0,8
$R_{2,1I} = R_{2,1II}$	4
$\kappa_{1I} = \kappa_{1II}$	0
$\kappa_{2I} = \kappa_{2II}$	1
$\omega_I = \omega_{II}$	5
$\bar{N}_{2r} = \bar{N}_{2l}$	1
$m_{2r} = m_{2l}$	0,8
$\kappa_{2r} = \kappa_{2l}$	10
$\omega_r = \omega_l$	1



## 7.1 Verhalten des Gesamtsystems

In diesem Beispiel wird das Gesamtverhalten des Systems dargestellt. Es werden auch dimensionslose Temperaturschwankungen des umlaufenden Fluids im Innern des Systems betrachtet. In den dann folgenden Beispielen sind nur noch die Schwankungen der dimensionslosen Austrittstemperaturen der Hauptströme als Ausgangsgrößen des Gesamtsystems von Interesse.

Eingangsgröße ist ein Einheitssprung der Schwankung der dimensionslosen Eintrittstemperatur des Hauptstroms I:

$$\theta'_{1, \text{ein}I} = 1, \quad \tau \geq 0. \quad (7.21)$$

Das System, in dem der Prozeß abläuft, besteht aus zwei gekoppelten Kreuzstrom-Wärmeübertragern mit quervermischttem Umlaufstrom, Abb. 7.1. Die Koordinatensysteme, in denen der Prozeß beschrieben wird, sind in Abb. 4.4 dargestellt.

Abbildung 7.2 zeigt, daß sich das Gesamtsystem zyklisch einem neuen stationären Zustand entgegenbewegt. Im Detail läßt sich der zeitliche Verlauf der Temperatursignale in Abb. 7.2 folgendermaßen erklären: Der Prozeß wird durch den Einheitssprung von  $\theta'_{1, \text{ein}I}$  eingeleitet, Abb. 7.1. Aufgrund der Quervermischung des Umlaufstroms wird Energie sofort zum Austritt des Hauptstroms von Apparat I transportiert, so daß  $\theta'_{1, \text{aus}I}$  ab  $\tau = 0$  – beginnend mit der Steigung Null – ansteigt, Abb. 7.4a. Der Sprung der dimensionslosen Temperaturschwankung des Hauptstroms I wandert in dem gewählten Zeitmaßstab mit unendlicher hoher Geschwindigkeit durch den Apparat I und erreicht bereits bei  $\tau = 0$  die Linie  $\xi_I = 1$ , so daß  $\theta'_{1, \text{aus}I}$  bei  $\tau = 0$  eine Diskontinuität besitzt, Abb. 7.4a. Die Größe des Sprungs ist durch

$$\theta'_{1, \text{aus}I}(\tau = 0) = \exp(-\bar{N}_1) \quad (7.22)$$

gegeben. Dieses Ergebnis liefert die Anwendung des Anfangswertsatzes der Laplace-Transformation Gl. 7.40. Der Zahlenwert für das Beispiel beträgt

$$\theta'_{1, \text{aus}I}(\tau = 0) = e^{-8} = 3,35 \cdot 10^{-4}. \quad (7.23)$$

Die dimensionslose Schwankung der Eintrittstemperatur des Umlaufstroms in den Apparat I  $\theta'_{2I}(\eta_1 = 0)$  bleibt bis  $\tau = 21$  konstant, Abb. 7.4c, da in den Verbindungsleitungen und im Apparat II noch umlaufendes Fluid mit den Temperaturen des stationären



Ausgangszustands vorhanden ist. Beide Eingangssignale für den Apparat I.  $\theta'_{1, \text{ein}I}$  und  $\theta'_{2I}(\eta_I = 0)$ , sind bis  $\tau = 21$  konstant. Daher bewegt sich dieses Untersystem einem neuen Beharrungszustand entgegen, Abb. 7.3.

Dieser Vorgang wird bei  $\tau = 21$  durch das Ansteigen des Eingangssignals  $\theta'_{2I}(\eta_I = 0)$  abgebrochen, Abb. 7.3. Dessen zeitlicher Verlauf läßt sich auf das Signal  $\theta'_{2I}(\eta_I = 1)$  zurückführen, das aufgrund der vorgehenden Überlegungen zunächst einen asymptotischen Verlauf hat, Abb. 7.3. Es wird durch die rechte Verbindungsleitung zum Eintritt des Apparats II transportiert. Die Verbindungsleitung bewirkt im wesentlichen eine zeitliche Verschiebung des Signals, Abb. 7.3. Ein solches System wird als Totzeitsystem [23] bezeichnet.

Nach  $\tau = 10$  erhält Apparat II zum ersten Mal ein von null verschiedenes Eingangssignal  $\theta'_{2II}(\eta_{II} = 0)$ , Abb. 7.4b. Aufgrund der Quervermischung steigt das Ausgangssignal des Gesamtsystems  $\theta'_{1, \text{aus}II}$  ab  $\tau = 10$  – beginnend mit der Steigung Null – an, Abb. 7.4b. Da das Eingangssignal für den Apparat II  $\theta'_{2II}(\eta_{II} = 0)$  einen asymptotischen Verlauf hat und das Eingangssignal  $\theta'_{1, \text{ein}II}$  konstant ist, bewegt sich auch das Untersystem II einem Beharrungszustand entgegen. Damit hat das Signal  $\theta'_{2II}(\eta_{II} = 1)$  einen asymptotischen Verlauf, Abb. 7.3. Nachdem dieses durch die linke Verbindungsleitung transportiert worden ist, erreicht es den Eintritt in den Apparat I. Das asymptotisch ansteigende Eingangssignal  $\theta'_{2I}(\eta_I = 0)$  leitet bei  $\tau = 21$  einen zweiten Zyklus ein, indem der sich im Untersystem I einstellende Beharrungszustand gestört wird. Der Gesamtprozeß ist zyklisch, wobei sich einstellende Beharrungszustände durch Signale, die mit dem umlaufenden Fluid transportiert werden, gestört werden. Schließlich erreicht das Gesamtsystem einen neuen stationären Zustand, wie Abb. 7.2 zeigt.

## 7.2 Verdeutlichung der Auswirkungen der inneren Zirkulation

Wie in Abschnitt 7.1 wird das System aus zwei gekoppelten Kreuzstrom-Wärmeübertragern mit quervermischemt Umlaufstrom betrachtet. Eingangsgröße ist ein Rechteckimpuls der Schwankung der dimensionslosen Eintrittstemperatur des Hauptstroms I, Abb. 7.5:

$$\theta'_{1, \text{ein}I} = 1 \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (7.24)$$

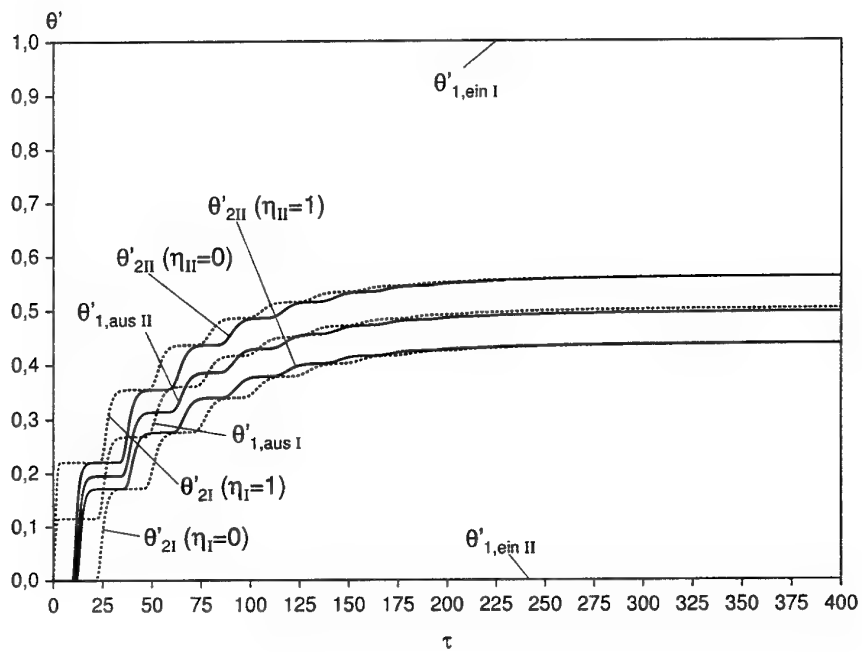


Abb. 7.2. Systemantwort für den Prozeß, der in Abb. 7.1 dargestellt ist. Die Kurven für den Wärmeübertrager I sind gestrichelt und die für den Wärmeübertrager II durchgezogen.

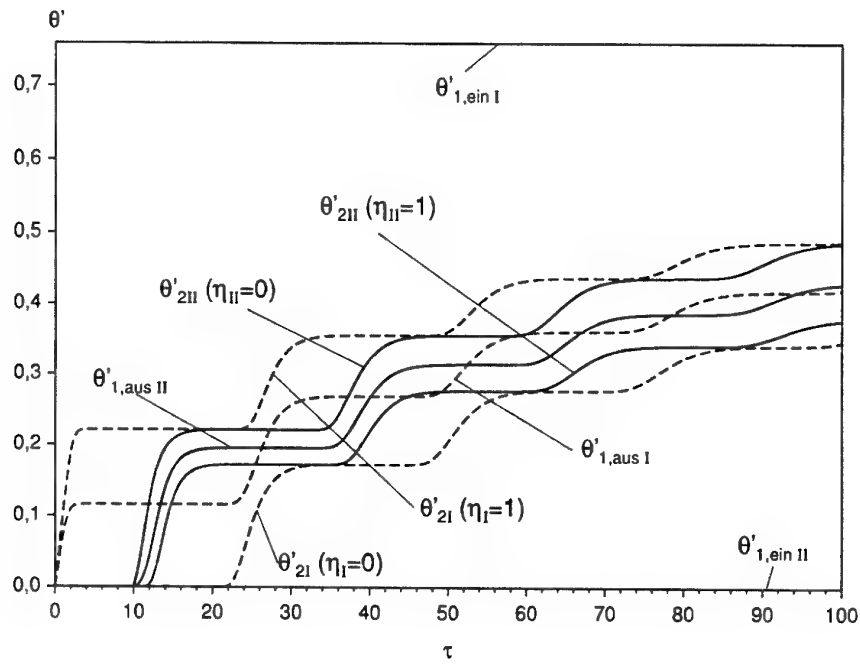


Abb. 7.3. Vergrößerte Darstellung von Abb. 7.2 zu Prozeßbeginn.

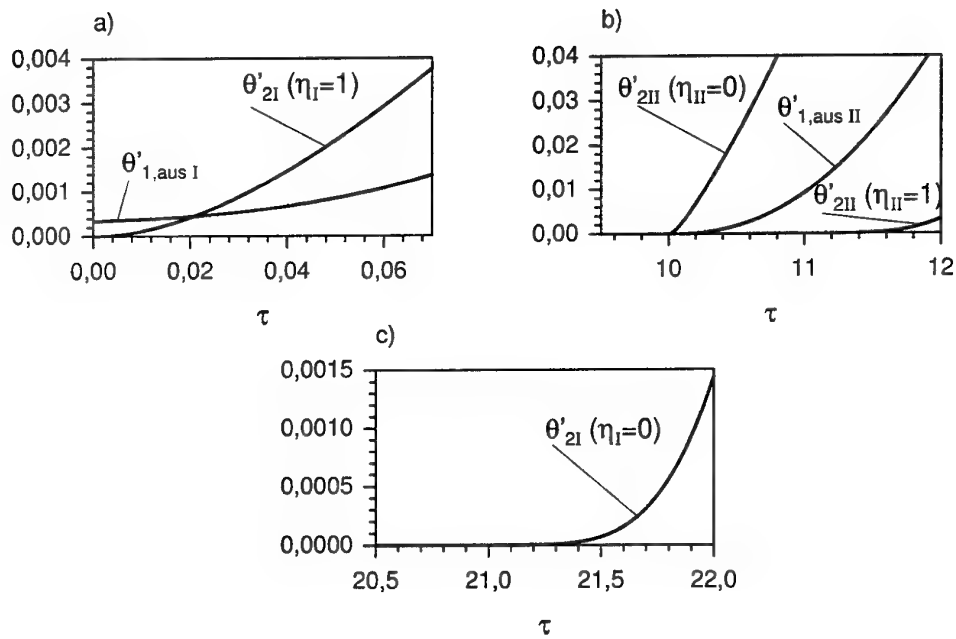
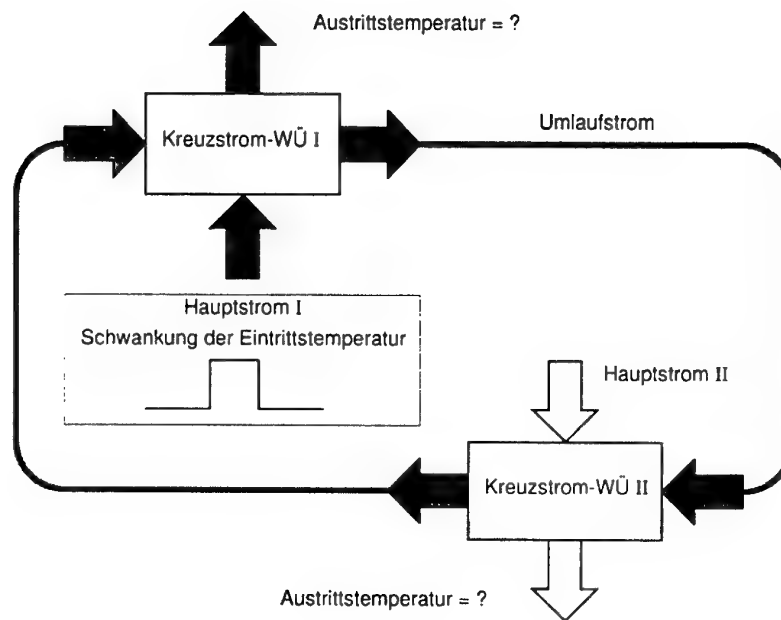


Abb. 7.4. Vergrößerte Darstellung von Abb. 7.3. Für drei wichtige Zeitintervalle, in denen die Schwankungen der dimensionslosen Temperaturen zu steigen beginnen, sind ihre Zeitverläufe aus Abb. 7.3 vergrößert dargestellt. Von besonderem Interesse sind die Anfangssteigung und eine mögliche Diskontinuität.



**Abb. 7.5.** Prozeß, der verdeutlicht, wie sich die innere Zirkulation des Systems auswirkt. Es sind zwei Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit quervermischem Umlaufstrom zusammengeschaltet. Die Eingangsgröße ist ein Rechteckimpuls der dimensionslosen Eintrittstemperatur des Hauptstroms I.

$$\theta'_{1, \text{ein} I} = 0 \quad 1 < \tau. \quad (7.25)$$

Auf diese Weise wird dem System kurzzeitig zusätzliche Energie zugeführt. Der zeitliche Verlauf der beiden Ausgangsgrößen ist in Abb. 7.6 dargestellt. Für große Zeiten erreicht das System wieder den stationären Ausgangszustand, d.h. die zusätzlich eingebrachte Energie wird vollständig aus dem System herausgetragen, Abb. 7.6.

Das Eingangssignal wird in zwei Ausgangssignale aufgespalten, deren zeitliche Verläufe wellenförmig gegen Null gehen, Abb. 7.6. Diese Kurvenverläufe sind charakteristisch für ein System mit innerer Zirkulation [43].

Nach Gl. 7.10 beträgt die dimensionslose Zeit, die die Flüssigkeitsteilchen für einen Umlauf benötigen,  $\tau_{v, \text{tot}} = 22$ . Zwar liegt die Vermutung nahe, daß dies der Abstand der wiederkehrenden Maxima in Abb. 7.6 ist. Dies ist jedoch nicht der Fall, da die umlaufenden Signale aufgrund der Wärmekapazitäten im System verzerrt werden. Dieser Effekt ist in Abb. 7.7 veranschaulicht. Für drei Systeme mit unterschiedlich großer Wärmekapazität der Wände ist die Schwankung der dimensionslosen Austrittstemperatur des Hauptstroms II über der Zeit dargestellt:

1. Kurve a in Abb. 7.7 gilt für ein System, bei dem die Wärmekapazität der Wände hoch ist:

$$\omega_I = \omega_{II} = 10 \quad (7.26)$$

$$\omega_r = \omega_l = 2. \quad (7.27)$$

2. Kurve b in Abb. 7.7 gilt für das Ausgangssystem mit

$$\omega_I = \omega_{II} = 5 \quad (7.28)$$

$$\omega_r = \omega_l = 1. \quad (7.29)$$

3. Kurve c in Abb. 7.7 gilt für ein System mit sehr kleiner Wärmekapazität der Wände:

$$\omega_I = \omega_{II} = 10^{-3} \quad (7.30)$$

$$\omega_r = \omega_l = 10^{-3}. \quad (7.31)$$

Abbildung 7.7 zeigt, daß bei sehr kleiner Wärmekapazität der Wände die umlaufenden Signale mit der Periode 22 wiederkehren. Bereits hier ist eine Verbreiterung der Maxima mit der Zeit zu erkennen. Je größer die Wärmekapazität des Systems ist, desto größer sind die Abstände der Maxima, Abb. 7.7 a und b.

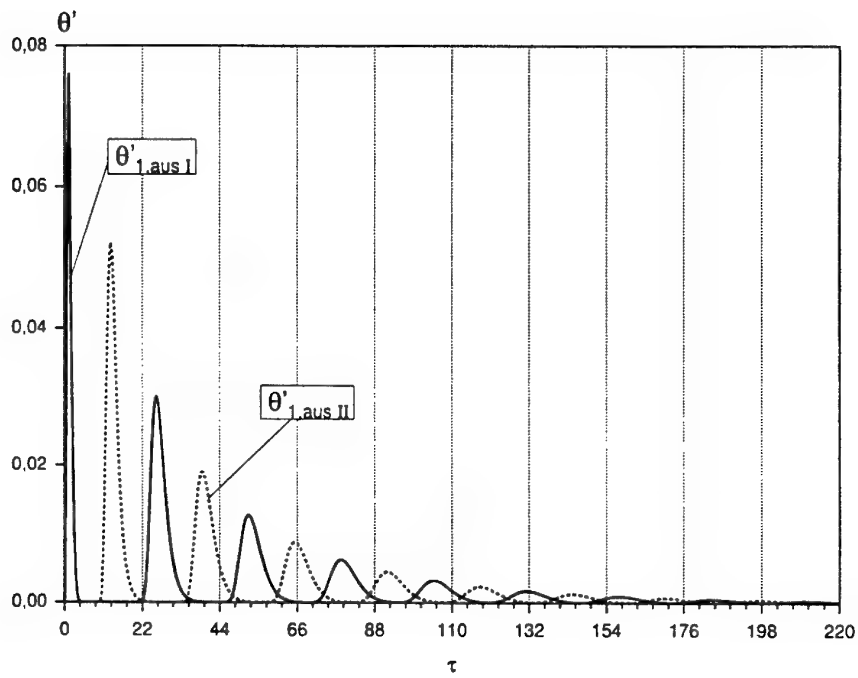
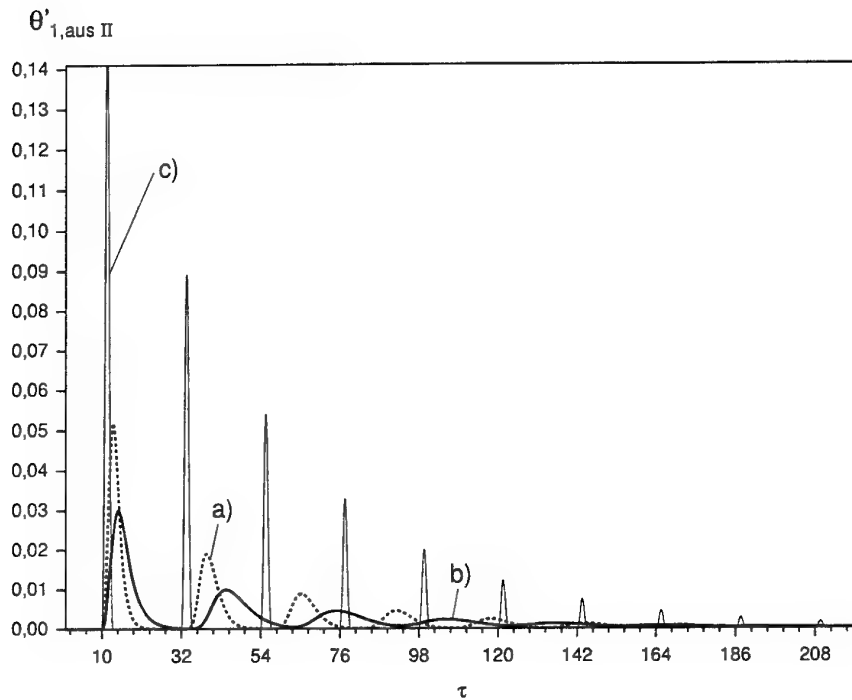


Abb. 7.6. Sytemantwort für den Prozeß, der in Abb. 7.5 dargestellt ist.



**Abb. 7.7.** Antworten verschiedener Systeme für den Prozeß, der in Abb. 7.5 dargestellt ist. Der zeitliche Verlauf der Schwankung der dimensionslosen Austrittstemperatur des wärmeaufnehmenden Hauptstroms II ist für drei verschiedene Systeme dargestellt: a) Ausgangssystem mit den Parametern aus Abschnitt 7, b) System, bei dem die Wärmekapazitäten der Wände doppelt so groß sind wie beim Ausgangssystem, c) System, bei dem die Wärmekapazitäten der Wände sehr klein sind. Die Fluidparameter sind bei allen drei Systemen gleich groß.



### 7.3 Systemantwort auf die Testfunktionen Sprung und harmonische Schwingung

In diesem Abschnitt werden die drei Systeme, die in Abb. 4.4 dargestellt sind, für den Fall untersucht, daß jeweils eine einzige Eingangsgröße vorgegeben wird, die entweder sprungförmig ist oder harmonisch schwingt.

Von den beiden Ausgangsgrößen des Systems wird aus Gründen der Übersichtlichkeit ausschließlich die Schwankung der dimensionslosen Austrittstemperatur des Hauptstroms II betrachtet.

Wenn es sich bei der einzigen vorgegebenen Eingangsgröße um eine harmonische Schwingung handelt, antwortet das System – nach einem Einschwingvorgang – mit einer harmonischen Schwingung gleicher Frequenz [23]. Voraussetzung hierfür ist, daß der Prozeß mit den linearisierten Energiegleichungen beschrieben wird. Amplitude und Phasenlage der Systemantwort werden durch den Frequenzgang bestimmt. Zu jeder der fünf Eingangsgrößen gehört ein Frequenzgang. Er ergibt sich aus der Übertragungsfunktion. Da hier fünf Eingangsgrößen und eine Ausgangsgröße betrachtet werden, gibt es fünf Übertragungsfunktionen:

$$\tilde{G}_{1II,1I}(s) = \frac{\tilde{\theta}'_{1,ausII}(s)}{\tilde{\theta}'_{1,einI}(s)} \quad (7.32)$$

$$\tilde{G}_{1II,1II}(s) = \frac{\tilde{\theta}'_{1,ausII}(s)}{\tilde{\theta}'_{1,einII}(s)} \quad (7.33)$$

$$\tilde{G}_{1II,\sigma_{1I}}(s) = \frac{\tilde{\theta}'_{1,ausII}(s)}{\tilde{\sigma}_{1I}(s)} \quad (7.34)$$

$$\tilde{G}_{1II,\sigma_{1II}}(s) = \frac{\tilde{\theta}'_{1,ausII}(s)}{\tilde{\sigma}_{1II}(s)} \quad (7.35)$$

$$\tilde{G}_{1II,\sigma_2}(s) = \frac{\tilde{\theta}'_{1,ausII}(s)}{\tilde{\sigma}_2(s)}. \quad (7.36)$$

Die rechten Seiten der Gln. 7.32 bis 7.36 sind aus Anh. C bekannt. Der Frequenzgang ist der Ausschnitt  $G(s = \mathcal{I}\Omega)$  aus der Übertragungsfunktion [23]. Grafisch wird der Frequenzgang dargestellt, indem für verschiedene dimensionslose Kreisfrequenzen  $\Omega$  die Werte der komplexen Funktion  $\tilde{G}$  berechnet werden. Anschließend wird der Imaginärteil  $\Im$  über dem Realteil  $\Re$  aufgetragen. Aus diesen Diagrammen können Amplitude und Phasenlage des Ausgangssignals im eingeschwungenen Zustand für beliebige dimensionslose Kreisfrequenzen abgelesen werden [23]. Dies wird an einem Beispiel

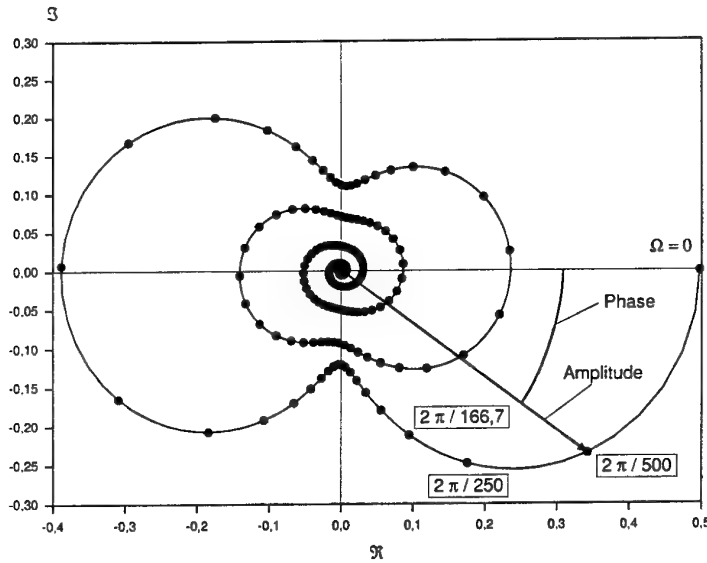


Abb. 7.8. Frequenzgang  $\tilde{G}(\mathcal{I}\Omega) = \frac{\tilde{\theta}'_{1,ausII}(\mathcal{I}\Omega)}{\tilde{\theta}'_{1,einI}(\mathcal{I}\Omega)}$  für ein System aus zwei gekoppelten Kreuzstrom-Wärmeübertragern mit quervermishtem Umlaufstrom. Der Abstand zwischen den markierten dimensionslosen Kreisfrequenzen beträgt  $\Delta\Omega = \frac{2\pi}{500}$ .

durchgeführt, Abb. 7.8.

In Abb. 7.8 ist der Frequenzgang

$$\tilde{G}(\mathcal{I}\Omega) = \frac{\tilde{\theta}'_{1,ausII}(\mathcal{I}\Omega)}{\tilde{\theta}'_{1,einI}(\mathcal{I}\Omega)} \quad (7.37)$$

für zwei zusammengeschaltete Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit quervermishtem Umlaufstrom dargestellt.

Der Frequenzgang ist eine Kurve mit der dimensionslosen Kreisfrequenz als Parameter. Die Kurve beginnt bei  $\Omega = 0$  und endet in diesem Fall für  $\Omega \rightarrow \infty$  im Ursprung. In Abständen von  $\Omega = \frac{2\pi}{500}$  sind die dimensionslosen Kreisfrequenzen als Punkte markiert. Für die ersten vier Punkte ist der Zahlenwert eingetragen.

Um Amplitude und Phasenlage der Ausgangsgröße abzulesen, wird ein Zeiger vom Ursprung bis zu dem Punkt auf dem Frequenzgang gezeichnet, der der Frequenz der Eingangsgröße entspricht. Die Länge des Zeigers ist die Amplitude der Ausgangsgröße, wenn die Amplitude der Eingangsgröße 1 beträgt. Der Winkel zwischen Abszisse und Zeiger ist die Phase der Ausgangsgröße. Ist die Amplitude der Eingangsgröße ungleich

1, so ist die Länge des Zeigers mit diesem Wert zu multiplizieren, um die Amplitude der Ausgangsgröße zu erhalten.

In Abb. 7.8 beträgt die Länge des Zeigers 0,415 und die Phase  $-34.4^\circ$ . Die dimensionslose Kreisfrequenz beträgt  $\Omega = \frac{2\pi}{500}$ . Wenn die Eingangsgröße

$$\theta'_{1, \text{ein} I}(\tau) = 0,1 \sin\left(\frac{2\pi}{500}\tau\right) \quad (7.38)$$

vorgegeben wird, lautet die Systemantwort im eingeschwungenen Zustand

$$\theta'_{1, \text{ein} II}(\tau) = \underbrace{0,415 \cdot 0,1}_{0,0415} \sin\left(\frac{2\pi}{500}\tau - \underbrace{\frac{\pi}{180}34,4}_{0,601}\right). \quad (7.39)$$

In den Abb. 7.9 bis 7.13 sind für die drei zusammenschalteten Systeme Sprungantwort und Frequenzgang wiedergegeben.

Neben der Beschreibung des dynamischen Verhaltens des Systems geht es auch darum, die Rechenergebnisse auf ihre Plausibilität zu überprüfen. Ein wichtiges Werkzeug sind die Grenzwertsätze der Laplace-Transformation [23].

Der Anfangswertsatz lautet: Strebt  $\theta(\tau)$  für  $\tau \rightarrow +0$  einem endlichen Grenzwert zu, so gilt

$$\theta(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{\theta}(s). \quad (7.40)$$

Der Endwertsatz lautet: Strebt  $\theta(\tau)$  für  $\tau \rightarrow +\infty$  einem endlichen Grenzwert zu, so gilt

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \theta(\tau) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{\theta}(s). \quad (7.41)$$

Mit den Grenzwertsätzen kann man den Wert der Funktion  $\theta(\tau)$  bei  $\tau = +0$  und  $\tau \rightarrow \infty$  ermitteln, ohne die Funktion  $\theta(\tau)$  im Zeitbereich zu kennen.

Die Grenzwertsätze lassen sich auch grafisch als Zusammenhang zwischen Frequenzgang und Übergangsfunktion interpretieren [44]. Die Übergangsfunktion ist die Systemantwort auf ein sprunghöhenförmiges Eingangssignal mit der Sprunghöhe 1 [44].

Der Anfangswertsatz besagt, daß die Endauslenkung der Übergangsfunktion bei  $\tau \rightarrow \infty$  gleich der Anfangsamplitude des Frequenzgangs bei  $\Omega = 0$  ist [44].

Der Endwertsatz besagt, daß die Anfangsauslenkung der Übergangsfunktion bei  $\tau = 0$  gleich der Endamplitude des Frequenzgangs bei  $\Omega \rightarrow \infty$  ist [44].

Die Grenzwertsätze in der grafischen Form werden auf den Frequenzgang angewendet, der in Abb. 7.8 dargestellt ist. Aus Abb. 7.8 werden folgende Werte abgelesen:

$$\tilde{G}_{II,II}(\mathcal{I}\Omega = 0) = 0,5 \quad (7.42)$$

$$\tilde{G}_{II,II}(\mathcal{I}\Omega \rightarrow \infty) = 0. \quad (7.43)$$

Ohne die Lösung im Zeitbereich zu kennen, muß die Übergangsfunktion folgende Werte annehmen:

$$\theta'_{1,ausII}(\tau = 0) = 0 \quad (7.44)$$

$$\theta'_{1,ausII}(\tau \rightarrow \infty) = 0,5. \quad (7.45)$$

Die numerische Rücktransformation der Lösung vom Frequenzbereich in den Zeitbereich und das Finite-Differenzen-Verfahren müssen ebenfalls diese Werte liefern, wenn die berechneten Lösungen plausibel sein sollen.

Um die Ergebnisse möglichst genau zu kontrollieren, werden in der vorliegenden Arbeit die Grenzwertsätze nach Gl. 7.40 und Gl. 7.41 ausgewertet. Das grafische Verfahren dient der Anschauung.

Gleichung 7.40 und Gl. 7.41 ergeben für den Anfangs- bzw. Endwert

$$\theta'_{1,ausII}(\tau = 0) = 0 \quad (7.46)$$

$$\theta'_{1,ausII}(\tau \rightarrow \infty) = 0,497. \quad (7.47)$$

Wenn es bei einem Prozeß einen stationären Endzustand gibt, kann dieser unabhängig von der dynamischen Rechnung nach Anh. A berechnet werden. Dazu sind die Parameter des stationären Endzustands anstatt der des Ausgangszustands zu verwenden. Zwischen den Parametern des stationären Ausgangszustands und denen des stationären Endzustands gelten die Beziehungen 7.48 bis 7.50, wenn Massenstromschwankungen auftreten:

$$\bar{N}_{1M}^{\infty} = \bar{N}_{1M} (1 + \sigma_{1M}^{\infty})^{m_{1M}-1} \quad M = I, II \quad (7.48)$$

$$\bar{N}_{2M}^{\infty} = \bar{N}_{2M} (1 + \sigma_2^{\infty})^{m_{2M}-1} \quad M = I, II \quad (7.49)$$

$$R_{2,1M}^{\infty} = R_{2,1M} \frac{1 + \sigma_2^{\infty}}{1 + \sigma_{1M}^{\infty}} \quad M = I, II. \quad (7.50)$$

Somit steht ein weiteres Werkzeug für die Kontrolle der Berechnungen zur Verfügung.

Für Prozesse, die mit der Laplace-Transformation und dem Finite-Differenzen-Verfahren berechnet werden können, werden immer beide Methoden angewendet. Da die Lösungsmethoden völlig unabhängig voneinander sind, ist eine Übereinstimmung der Ergebnisse ein guter Hinweis darauf, daß keine Rechenfehler vorhanden sind.

### 7.3.1 Schwankung der dimensionslosen Eintrittstemperatur des Hauptstroms I als Eingangsgröße

In Abb. 7.9 sind die Systemantworten  $\theta'_{1,ausII}$  für die Eingangsgröße  $\theta'_{1,einI}$  als Übergangsfunktion und als Frequenzgang dargestellt, und zwar für die drei Systeme in Abb. 4.4.

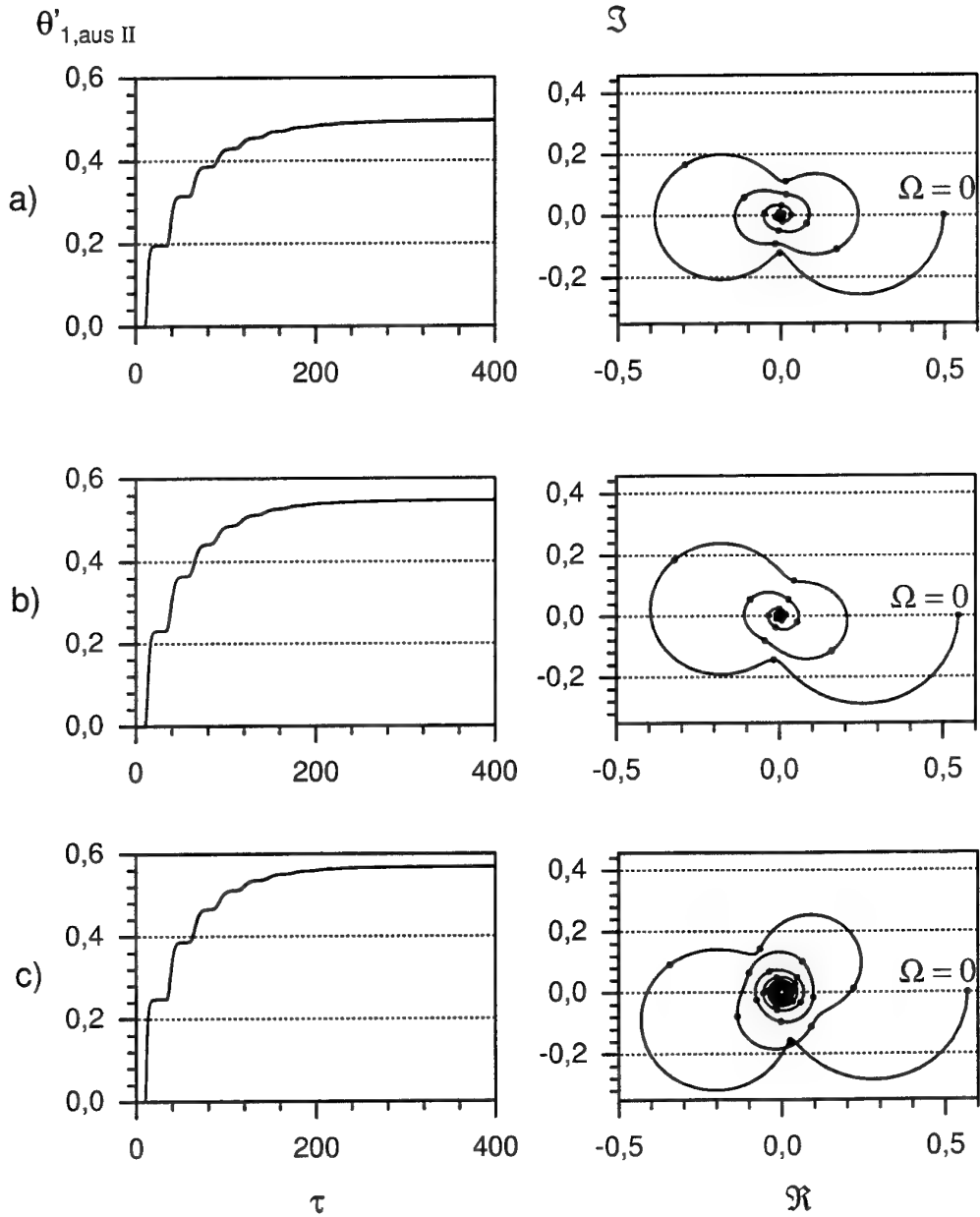
Exakte und linearisierte Energiegleichungen unterscheiden sich erst beim Auftreten von Massenstromschwankungen, Anh. B. Da in diesem Beispiel keine Massenstromschwankungen auftreten, liefern sie die gleichen Lösungen.

Für alle Systeme besitzt der zeitliche Verlauf der Ausgangsgröße  $\theta'_{1,ausII}$  eine dimensionslose Totzeit  $\tau = 10$ , da die eingebrachte Störung mit dem Umlaufstrom vom Wärmeübertrager I zum Wärmeübertrager II transportiert wird, Abb. 7.9 und Abb. 4.4.

Die dimensionslose Temperaturschwankung  $\theta'_{1,ausII}$  erreicht zyklisch einen neuen stationären Endwert. Dieser Vorgang wurde in Abschnitt 7.1 für zwei gekoppelte Kreuzstrom-Wärmeübertrager mit quervermischem Umlaufstrom erläutert. Die beiden anderen Systeme, Abb. 7.9 b und c, zeigen qualitativ das gleiche Verhalten.

Im folgenden wird die Plausibilität der Rechenergebnisse anhand von Tab. 7.2 überprüft. In der zweiten Spalte sind die stationären Endwerte mit den Gleichungen in Anh. A berechnet worden. Zum Vergleich sind in der dritten Spalte die Werte eingetragen, die sich mit der Laplace-transformierten Ausgangsgröße aus dem Endwertsatz ergeben. Die Zahlenwerte stimmen auf sechs Dezimalstellen überein. Die Angabe von sechs Dezimalstellen ist physikalisch nicht begründet, sie dient der Beurteilung der verwendeten Rechenmethoden.

Die Übergangsfunktionen sind mit der Laplace-Transformation und mit dem Finite-Differenzen-Verfahren berechnet worden. Im Rahmen der Zeichengenauigkeit können die beiden Lösungen in Abb. 7.9 nicht unterschieden werden. Da die beiden Lösungsmethoden völlig unabhängig voneinander sind und eine zufällige Übereinstimmung un-



**Abb. 7.9.** Systemantwort auf eine Schwankung der Eintrittstemperatur des Hauptstroms I. a) Kreuzstrom mit quervermischem Umlaufstrom, b) Kreuzstrom mit quervermischten Hauptströmen, c) Gegenstrom. Links Übergangsfunktionen, rechts Frequenzgänge. Der Abstand zwischen den markierten dimensionslosen Kreisfrequenzen beträgt  $\Delta\Omega = 2\pi/50$ .

**Tabelle 7.2.** Plausibilität der Temperaturverläufe und Frequenzgänge in Abb. 7.9. Es sind Zahlenwerte für  $\theta'_{1,ausII}$  angegeben.

	Anhang A $\tau \rightarrow \infty$	Endwertsatz $\tau \rightarrow \infty$	$\theta'_{1,ausII}^{Laplace}$ ( $\tau = 300$ )	$\theta'_{1,ausII}^{FinDiff}$ ( $\tau = 300$ )
Kreuzstrom, Umlaufstrom quervermischt	0,496894	0,496894	0,495107	0,495100
Kreuzstrom, Hauptströme quervermischt	0,546977	0,546977	0,545965	0,546176
Gegenstrom	0,568565	0,568565	0,567515	0,567831

wahrscheinlich ist, wird hierdurch die Zuverlässigkeit beider Lösungsmethoden bestätigt.

Mit dem Finite-Differenzenverfahren wurde bis  $\tau = 300$  mit einer Zeitschrittweite von  $\Delta\tau = 0,0244141$  gerechnet. Dies entspricht 12288 Zeitschritten. In Tab. 7.2 sind die Zahlenwerte der Ausgangsgröße bei  $\tau = 300$  für beide Lösungsmethoden angegeben. Die Ergebnisse stimmen auf drei Dezimalstellen überein.

Aufgrund der dargestellten Übereinstimmungen sind die Rechenergebnisse plausibel. Auch die Ergebnisse der folgenden Beispiele sind auf diese Weise überprüft worden.

### 7.3.2 Schwankung der dimensionslosen Eintrittstemperatur des Hauptstroms II als Eingangsgröße

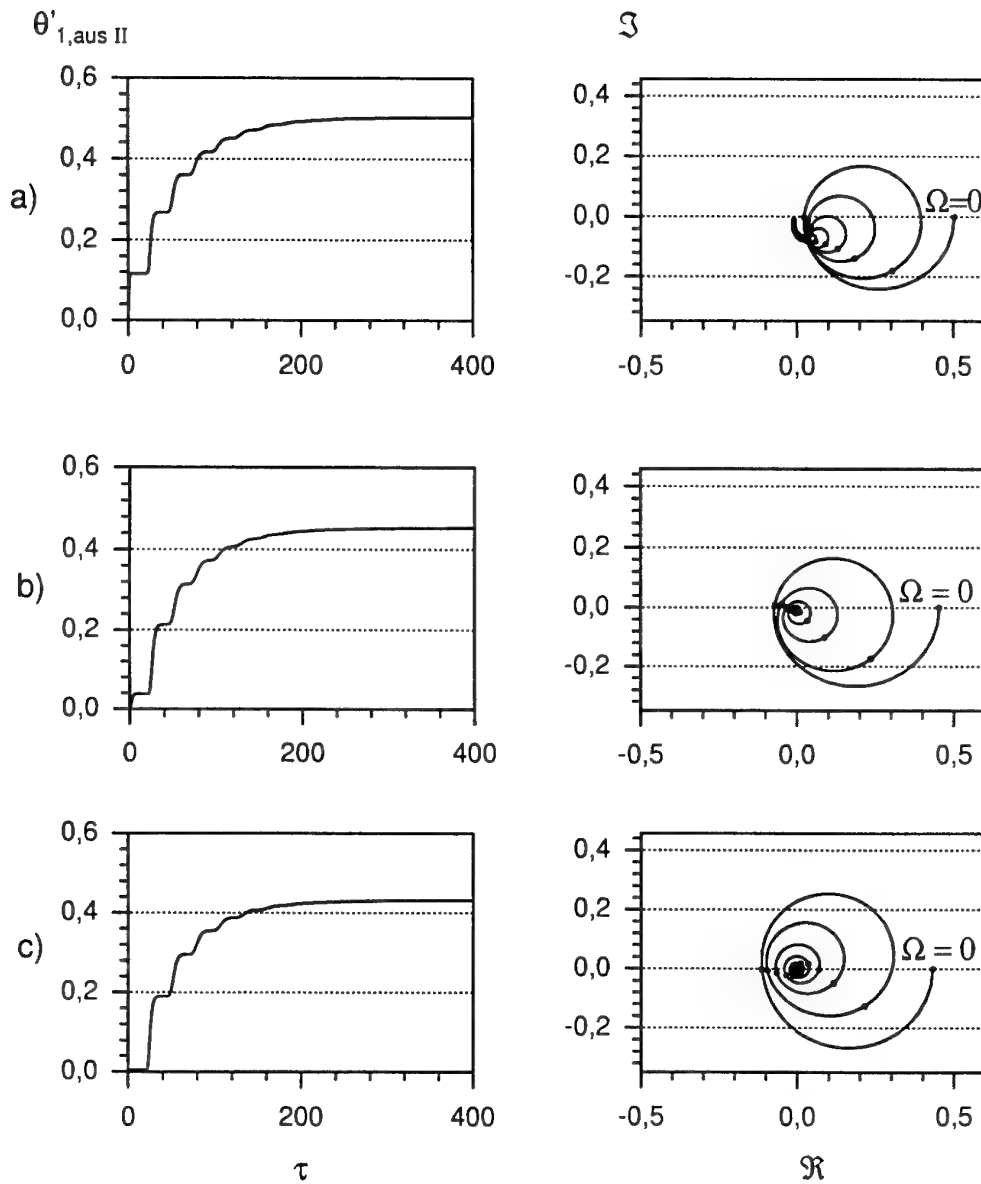
In Abb. 7.10 sind die Systemantworten auf die Eingangsgröße  $\theta'_{1, \text{einII}}$  dargestellt. Die stationären Endwerte sind in Tab. 7.3 angegeben.

**Tabelle 7.3.** Stationäre Endwerte der Ausgangsgröße  $\theta'_{1, \text{ausII}}$  bei einem Einheitssprung der Schwankung der dimensionslosen Eintrittstemperatur des Hauptstroms II, Abb. 7.10.

	$\theta'_{1, \text{ausII}}(\tau \rightarrow \infty)$
Kreuzstrom, Umlaufstrom quervermischt	0,503
Kreuzstrom, Hauptströme quervermischt	0,453
Gegenstrom	0,431

Die Anwendung des Anfangswertsatzes 7.40 ergibt, daß die Übergangsfunktionen für alle drei Systeme zum Zeitpunkt  $\tau = 0$  den Wert  $\theta'_{1, \text{ausII}} = \exp(-8)$  haben. Der Frequenzgang mündet für  $\Omega \rightarrow \infty$  daher nicht in den Ursprung. Das Ausgangssignal besitzt eine endliche Amplitude, wenn die Frequenz des Eingangssignals gegen unendlich geht.





**Abb. 7.10.** Systemantwort auf eine Schwankung der Eintrittstemperatur des Hauptstroms II. a) Kreuzstrom mit quervermischem Umlaufstrom, b) Kreuzstrom mit quervermischten Hauptströmen, c) Gegenstrom. Links Übergangsfunktionen, rechts Frequenzgänge. Der Abstand zwischen den markierten dimensionslosen Kreisfrequenzen beträgt  $\Delta\Omega = 2\pi/50$ .

Physikalisch realisierbare Systeme besitzen immer eine Trägheit, so daß das System bei sehr hohen Frequenzen nicht mehr folgen kann und schließlich bei  $\Omega \rightarrow \infty$  in Ruhe verharrt [44]. Bei mechanischen Systemen beruht die Trägheit gegenüber Geschwindigkeitsänderungen auf der Masse, bei den Fluiden in den Wärmeübertragern beruht die Trägheit gegenüber Temperaturänderungen auf den Wärmekapazitäten.

Beim Gasstrom ist der dimensionslose Parameter  $\kappa_1$  gleich null gesetzt worden. Er läßt sich nach Gl. 4.73 darstellen als

$$\kappa_1 = \frac{X}{w_1} \frac{1}{t_B} = \frac{t_{v1}}{t_B} \quad (7.51)$$

oder

$$\kappa_1 = \frac{X}{w_1} \frac{1}{t_B} = \frac{X \varrho_1 A_{q1} c_{p1}}{w_1 t_B \varrho_1 A_{q1} c_{p1}} = \frac{C_1}{\bar{W}_1 t_B}. \quad (7.52)$$

Die Gln. 7.51 und 7.52 zeigen, daß eine Vernachlässigung der Verweilzeit des Gasstroms im stationären Ausgangszustand gleichbedeutend ist mit einer Vernachlässigung der Wärmekapazität des Gases, das sich in dem Strömungskanal befindet. Daher verhält es sich trägheitslos bezüglich aufgeprägter Temperaturänderungen.

### 7.3.3 Schwankung des Massenstroms des Hauptstroms I als Eingangsgröße

In Abb. 7.11 sind die Systemantworten auf die Eingangsgröße  $\sigma_{1I}$  dargestellt. Beim Auftreten von Massenstromschwankungen liefern exakte und linearisierte Energiegleichungen unterschiedliche Sprungantworten.

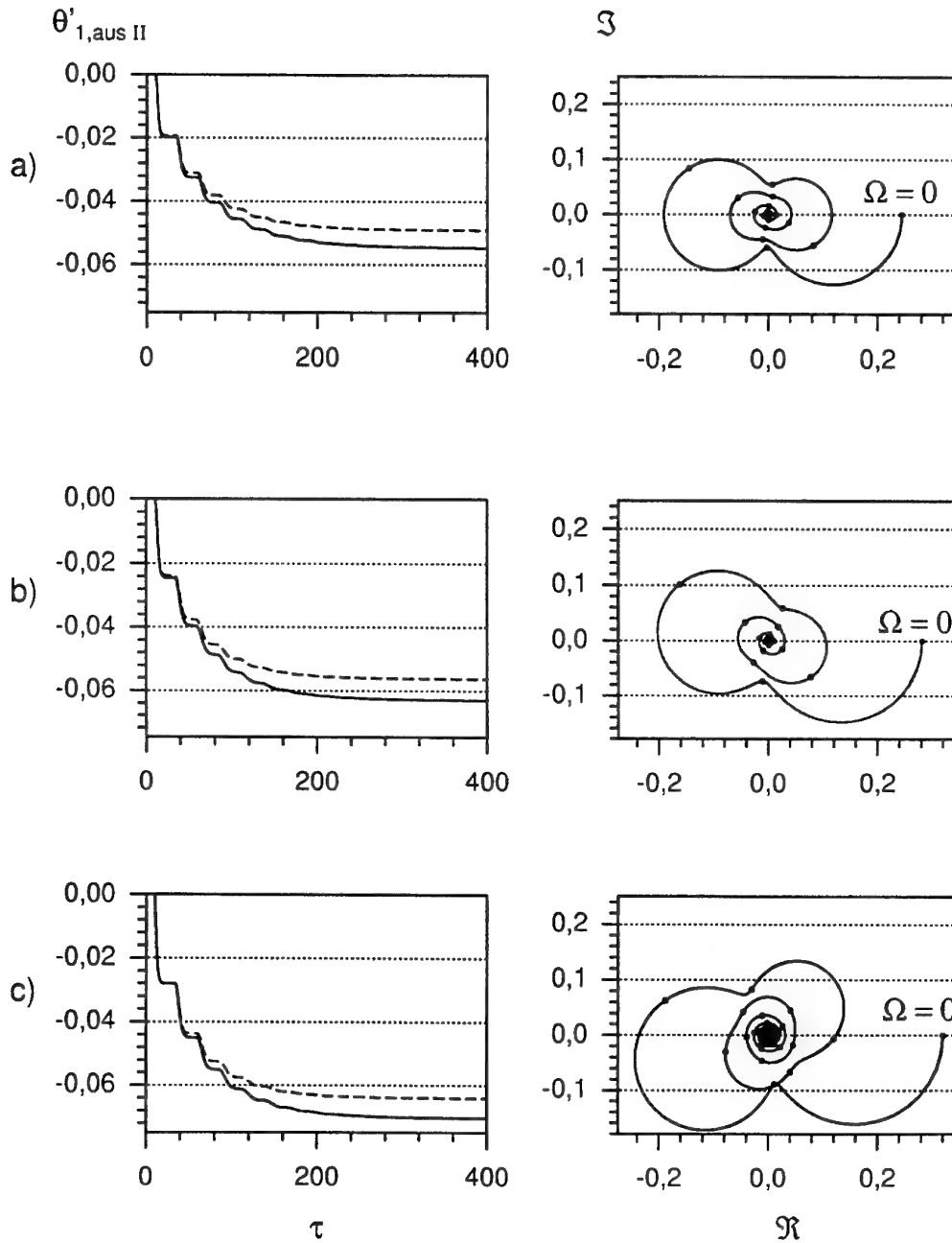
Der Frequenzgang läßt sich nur für die linearisierten Energiegleichungen ermitteln und ist daher nur für kleine Amplituden der Massenstromschwingungen gültig.

In Abb. 7.11 sind auf der linken Seite nicht die Übergangsfunktionen dargestellt, sondern die Systemantworten auf einen Massenstromabfall mit

$$\sigma_{1I} = -0.2 \quad \tau \geq 0. \quad (7.53)$$

Einen Einheitssprung des Massenstroms im Zusammenhang mit den linearisierten Energiegleichungen zu untersuchen, ist physikalisch nicht sinnvoll, da die linearisierten Energiegleichungen nur für kleine Massenstromschwankungen gültig sind.

Die Ausgangsgröße  $\theta'_{1,ausII}$  beginnt erst bei  $\tau = 10$  abzufallen, da die eingebrachte Störung erst durch die Verbindungsleitung zum Wärmeübertrager II transportiert



**Abb. 7.11.** Systemantwort auf eine Schwankung des Massenstroms des Hauptstroms I. a) Kreuzstrom mit quervermishtem Umlaufstrom, b) Kreuzstrom mit quervermishten Hauptströmen, c) Gegenstrom. Links Sprungantworten (die Lösung der exakten Energiegleichungen ist durchgezogen, die der linearisierten Energiegleichungen gestrichelt), rechts Frequenzgänge. Der Abstand zwischen den markierten dimensionslosen Kreisfrequenzen beträgt  $\Delta\Omega = 2\pi/50$ .

werden muß, Abb. 4.4. Für große Zeiten bildet sich ein neuer stationärer Zustand aus. Die Lösung der linearisierten Energiegleichungen stimmt für kleine Zeiten,  $\tau < 40$ , mit der Lösung der exakten Energiegleichungen gut überein. Die späteren Kurvenverläufe und die neuen stationären Endwerte der beiden Lösungen weichen jedoch voneinander ab, Tab. 7.4.

**Tabelle 7.4.** Vergleich der stationären Endwerte für die exakten und für die linearisierten Energiegleichungen bei einem Massenstromabfall des Hauptstroms I mit  $\sigma_{1I} = -0,2$ , Abb. 7.11.

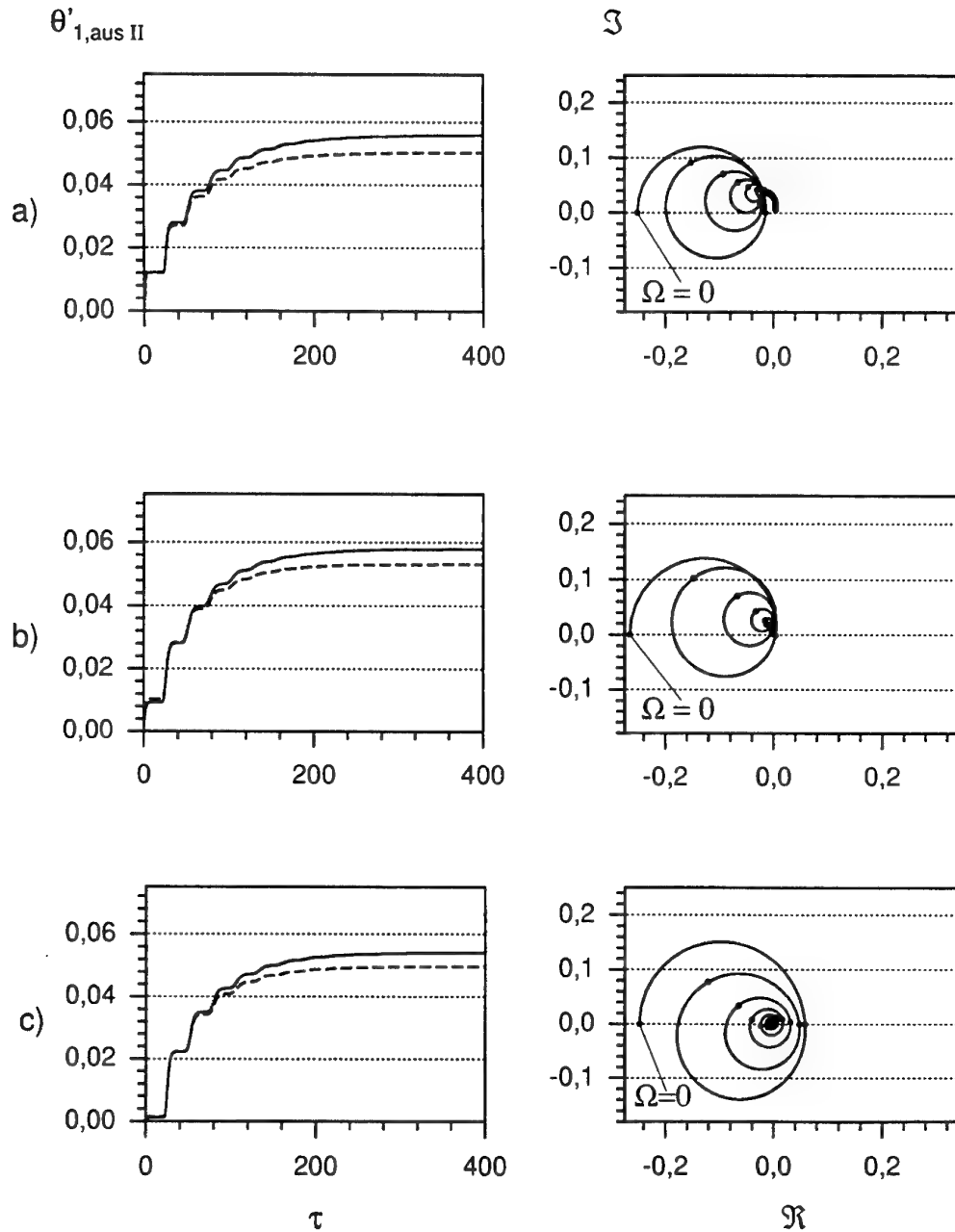
	$\theta'_{1,ausII}{}^{exakt}(\tau \rightarrow \infty)$	$\theta'_{1,ausII}{}^{lin}(\tau \rightarrow \infty)$
Kreuzstrom, Umlaufstrom quervermischt	-0,0546555	-0,0490650
Kreuzstrom, Hauptströme quervermischt	-0,0630291	-0,0562606
Gegenstrom	-0,0703658	-0,0640787

Auffällig ist die Ähnlichkeit der Frequenzgänge für die Massenstromschwankung des Hauptstroms I, Abb. 7.11, mit den Frequenzgängen für die Schwankung der Eintrittstemperatur des Hauptstroms I, Abb. 7.9. Beide Eingangsgrößen haben qualitativ die gleiche Auswirkung auf das Ausgangssignal.

### 7.3.4 Schwankung des Massenstroms des Hauptstroms II als Eingangsgröße

In Abb. 7.12 sind die Systemantworten auf das Eingangssignal  $\sigma_{1II}$  dargestellt. Auf der linken Seite ist die Sprungantwort auf einen Massenstromabfall mit  $\sigma_{1II} = -0,2$  dargestellt.

Auffällig ist wie in Abschnitt 7.3.3 die Ähnlichkeit der Frequenzgänge für die Mas-



**Abb. 7.12.** Systemantwort auf eine Schwankung des Massenstroms des Hauptstroms II. a) Kreuzstrom mit quervermishtem Umlaufstrom, b) Kreuzstrom mit quervermishten Hauptströmen, c) Gegenstrom. Links Sprungantworten (die Lösung der exakten Energiegleichungen ist durchgezogen, die der linearisierten Energiegleichungen gestrichelt), rechts Frequenzgänge. Der Abstand zwischen den markierten dimensionslosen Kreisfrequenzen beträgt  $\Delta\Omega = 2\pi/50$ .

**Tabelle 7.5.** Vergleich der Anfangswerte für die exakten und für die linearisierten Energiegleichungen bei einem Massenstromabfall des Hauptstroms II mit  $\sigma_{1II} = -0,2$ .

	$\theta'_{1,ausII}(\tau = 0)$	$\theta'^{lin}_{1,ausII}(\tau = 0)$
Kreuzstrom, Umlaufstrom quervermischt	$8,45361 \cdot 10^{-5}$	$8,55302 \cdot 10^{-5}$
Kreuzstrom, Hauptströme quervermischt	$6,25816 \cdot 10^{-4}$	$5,89289 \cdot 10^{-4}$
Gegenstrom	$2,33630 \cdot 10^{-4}$	$2,26702 \cdot 10^{-4}$

senstromschwankung des Hauptstroms II, Abb. 7.12, mit den Frequenzgängen für die Schwankung der Eintrittstemperatur des Hauptstroms II, Abb. 7.10.

Der Verlauf von  $\theta'_{1,ausII}$  beginnt mit einem Sprung, der auf die Modellierung des Gasstroms zurückzuführen ist, Abschnitt 7.3.2. Dieser Sprung ist im Rahmen der Zeichengenauigkeit in den Sprungantworten nicht erkennbar, Abb. 7.12. Im Gegensatz zum Abschnitt 7.3.2 sind die Sprünge von  $\theta'_{1,ausII}$  bei  $\tau = 0$  für alle Stromführungen verschieden groß. Zusätzlich muß zwischen linearisierten und exakten Energiegleichungen unterschieden werden, Tab. 7.5

Für die Endwerte liefern exakte und linearisierte Energiegleichungen ebenfalls unterschiedliche Zahlenwerte. Diese sind in Tab. 7.6 zusammengestellt.

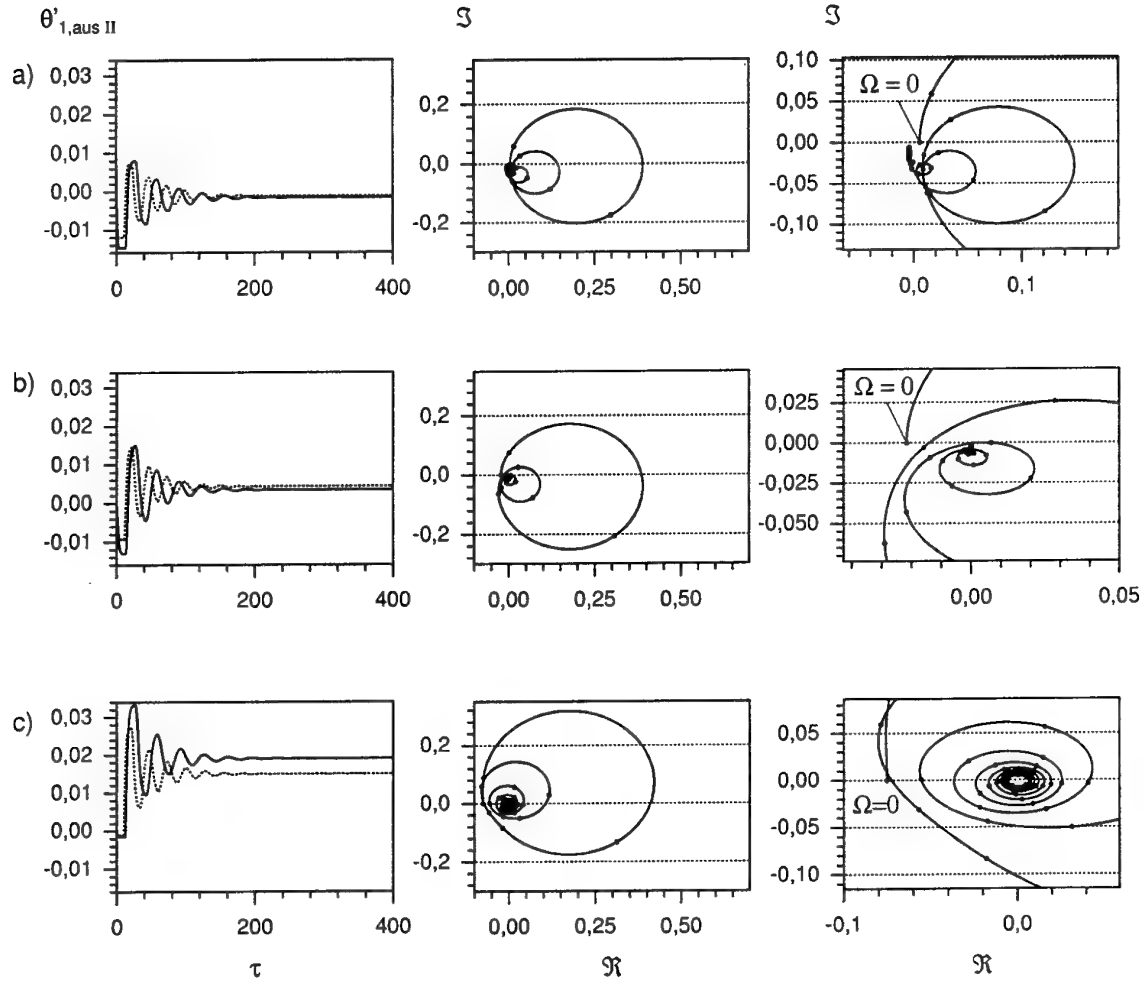
### 7.3.5 Schwankung des Massenstroms des umlaufenden Fluids als Eingangsgröße

In Abb. 7.13 sind die Systemantworten auf die Eingangsgröße  $\sigma_2$  dargestellt. Auf der linken Seite ist die Sprungantwort auf einen Massenstromabfall mit  $\sigma_2 = -0,2$  dargestellt.

Wie Abb. 7.13 zeigt, schwingt die Ausgangsgröße  $\theta'_{1,ausII}$  mit fallender Amplitude, bis

**Tabelle 7.6.** Vergleich der stationären Endwerte für die exakten und für die linearisierten Energiegleichungen bei einem Massenstromabfall des Hauptstroms II mit  $\sigma_{1II} = -0.2$ , Abb. 7.10.

	$\theta'_{1,ausII}{}^{exakt}(\tau \rightarrow \infty)$	$\theta'_{1,ausII}{}^{lin}(\tau \rightarrow \infty)$
Kreuzstrom, Umlaufstrom quervermischt	0,0558390	0,0503138
Kreuzstrom, Hauptströme quervermischt	0,0579201	0,0531349
Gegenstrom	0,0541513	0,0496343



**Abb. 7.13.** Systemantwort auf eine Schwankung des Massenstroms des Umlaufstroms. a) Kreuzstrom mit quervermishtem Umlaufstrom, b) Kreuzstrom mit quervermishten Hauptströmen, c) Gegenstrom. Links Sprungantworten (die Lösung der exakten Energiegleichungen ist durchgezogen, die der linearisierten Energiegleichungen gestrichelt), Mitte und rechts Frequenzgänge. Der Abstand zwischen den markierten dimensionslosen Kreisfrequenzen beträgt  $\Delta\Omega = 2\pi/50$ .



**Tabelle 7.7.** Vergleich der stationären Endwerte für die exakten und für die linearisierten Energiegleichungen bei einem Massenstromabfall des umlaufenden Fluids mit  $\sigma_2 = -0,2$ , Abb. 7.13.

	$\theta'_{1,ausII}{}^{exakt}(\tau \rightarrow \infty)$	$\theta'_{1,ausII}{}^{lin}(\tau \rightarrow \infty)$
Kreuzstrom Umlaufstrom quervermischt	-0,00154227	-0,00110672
Kreuzstrom Hauptströme quervermischt	+0,00346866	+0,00432710
Gegenstrom	+0,0190972	+0,0150339

ein neuer stationärer Zustand erreicht wird. Eine Temperaturschwingung, die durch einen Massenstromsprung induziert wird, existiert nicht für Einzelapparate, die in dieser Arbeit betrachtet werden. Die Periodendauer der abklingenden Schwingung wird von der Zeit beeinflusst, die das Fluid 2 nach dem Massenstromsprung pro Umlauf benötigt, und von den Wärmekapazitäten im System, Abschnitt 7.1.

Ein weiterer Effekt, der schon bei der stationären Untersuchung vorgestellt worden ist, zeigt sich, wenn man die stationären Endwerte von  $\theta'_{1,ausII}$  betrachtet, Tab. 7.7. Der stationäre Endwert der Ausgangsgröße beim Gegenstrom und beim einseitig quervermischten Kreuzstrom mit quervermischten Hauptströmen hat ein positives Vorzeichen, während er beim Kreuzstrom mit quervermischem Umlaufstrom ein negatives Vorzeichen hat. Ob sich die Temperaturänderung des Hauptstroms bei einem Massenstromabfall vergrößert oder verkleinert, hängt von der Lage des stationären Ausgangszustands und von der Stromführung in den Einzelapparaten ab, Abschnitt 2.4.

In Abb. 7.13 sind die Extrema der Kurven, die mit den exakten Energiegleichungen berechnet worden sind, und derjenigen, die mit den linearisierten Energiegleichungen berechnet worden sind, zeitlich verschoben. Hierin zeigt sich ein wichtiger physikalischer Unterschied zwischen den exakten und den linearisierten Energiegleichungen.

**Tabelle 7.8.** Dimensionslose Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Informationen in Strömungsrichtung des Umlaufstroms für die exakten und die linearisierten Energiegleichungen in den verschiedenen Untersystemen.

Untersystem	linearisierte Energiegleichungen	exakte Energiegleichungen
Kreuzstrom $\frac{d\eta_M}{d\tau}$	$\frac{1}{\kappa_{2M}}$	$\frac{1+\sigma_2(\tau)}{\kappa_{2M}}$
Gegenstrom $\frac{d\xi_M}{d\tau}$	$-\frac{1}{\kappa_{2M}}$	$-\frac{1+\sigma_2(\tau)}{\kappa_{2M}}$
Rohrstrom $\frac{d\zeta_M}{d\tau}$	$\frac{1}{\kappa_{2M}}$	$\frac{1+\sigma_2(\tau)}{\kappa_{2M}}$

Störungen, die in das Umlaufsystem eingebracht werden, breiten sich in Strömungsrichtung mit der Strömungsgeschwindigkeit des umlaufenden Fluids aus. Diese physikalische Tatsache wird im Fall von Massenstromschwankungen nur von den exakten Energiegleichungen richtig wiedergegeben.

Um dies zu zeigen, werden die Charakteristiken der exakten und linearisierten Energiegleichungen, die beide vom hyperbolischen Typ sind, analysiert [35]. Die dimensionslosen Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Informationen in Strömungsrichtung des umlaufenden Fluids sind für die einzelnen Untersysteme in Tab. 7.8 zusammengestellt.

Um zu erkennen, ob die dimensionslosen Ausbreitungsgeschwindigkeiten in den Energiegleichungen den wahren Ausbreitungsgeschwindigkeiten entsprechen, werden die Ausdrücke in Tab. 7.8 dimensionsbehaftet dargestellt.

Beispielsweise gilt für den Kreuzstrom-Wärmeübertrager, wenn die linearisierten Energiegleichungen verwendet werden, Tab. 7.8:

$$\frac{d\eta_M}{d\tau} = \frac{1}{\kappa_{2M}} \quad (7.54)$$

$$\Rightarrow \frac{t_B}{Y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t_{v2M}/t_B} \quad (7.55)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \bar{w}_{2M} = \text{const.} \quad (7.56)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit nach Gl. 7.56 ist falsch. Störungen breiten sich immer mit der Strömungsgeschwindigkeit des stationären Ausgangszustands aus, auch wenn sich die Strömungsgeschwindigkeit mit der Zeit ändert.

Wenn die exakten Energiegleichungen für den Kreuzstrom-Wärmeübertrager verwendet werden, gilt nach Tab. 7.8:

$$\frac{d\eta_M}{d\tau} = \frac{1 + \sigma_2}{\kappa_{2M}} \quad (7.57)$$

$$\Rightarrow \frac{t_B}{Y} \frac{dy}{dt} = \frac{1 + \frac{w'_{2M}(t)}{\bar{w}_{2M}}}{t_{v2M}/t_B} \quad (7.58)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt}(t) = \bar{w}_{2M} + w'_{2M}(t). \quad (7.59)$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit von Informationen und Strömungsgeschwindigkeit stimmen nach Gl. 7.59 überein.

Nach dem Massenstromabfall des Umlaufstroms sind die richtigen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der exakten Energiegleichungen kleiner als die falschen der linearisierten Energiegleichungen, Tab. 7.8. Dies erklärt die Phasenverschiebung in Abb. 7.13. Die Extrema erscheinen bei den linearisierten Energiegleichungen zu früh, da sie sich zu schnell ausbreiten.

### 7.3.6 Pulsierender Massenstrom großer Amplitude

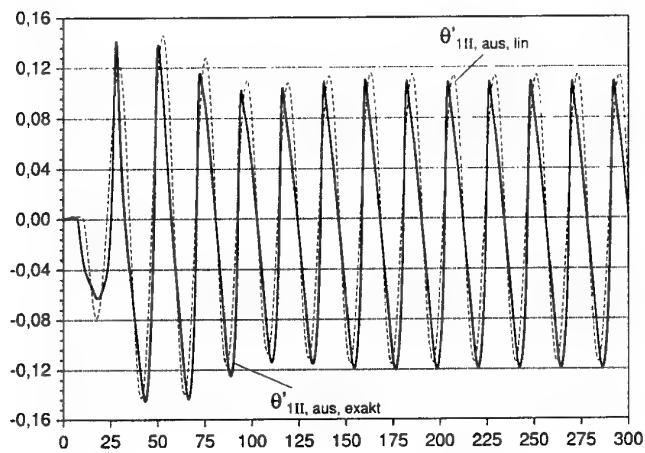
Wenn die Massenstromschwankungen nicht mehr sprungförmig zum Zeitpunkt  $\tau = 0$  sind, muß das Finite-Differenzen-Verfahren verwendet werden, um die exakten Energiegleichungen zu lösen.

In diesem Abschnitt werden die Systemantworten auf einen pulsierenden Umlaufstrom mit

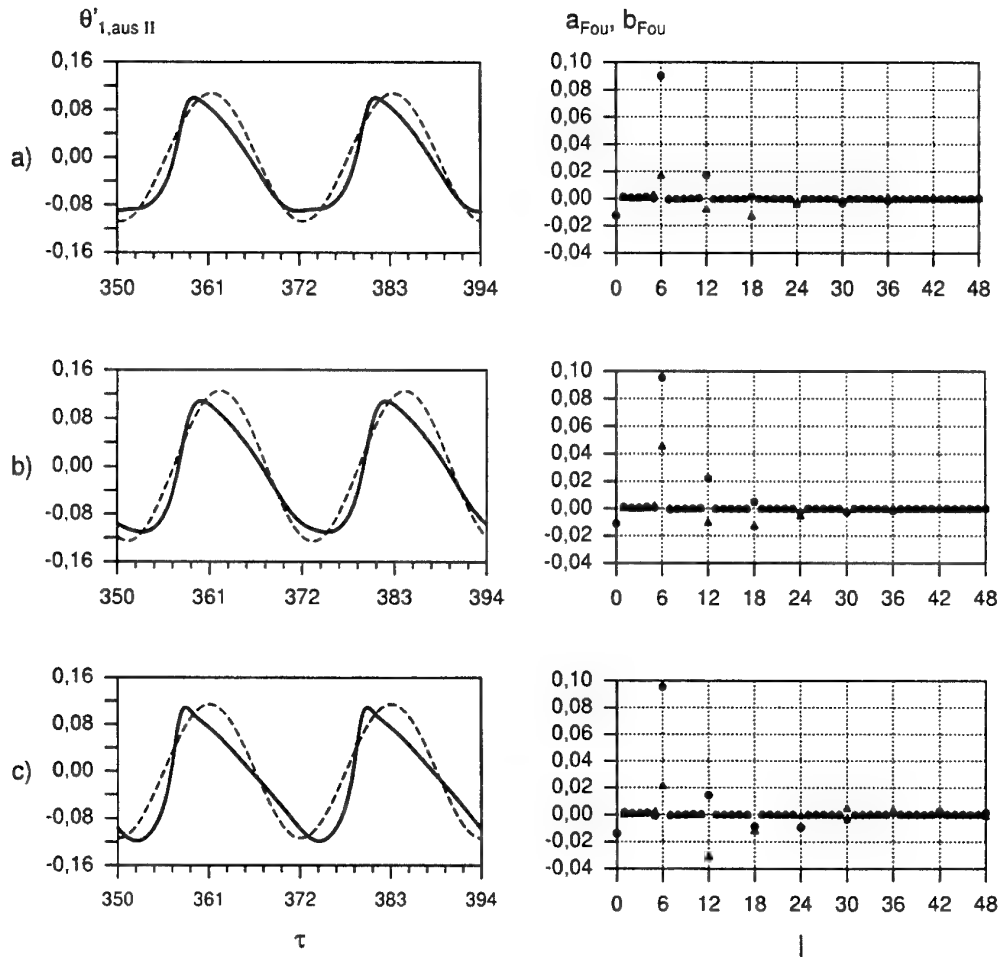
$$\sigma_2 = 0,6 \sin\left(\frac{2\pi}{22}\tau\right) \quad (7.60)$$

als Eingangsgröße berechnet.

In Abb. 7.14 ist der zeitliche Verlauf der Ausgangsgröße für zwei gekoppelte Gegenstrom-Wärmeübertrager dargestellt. Nach einem Einschwingvorgang ergeben sich wieder periodische Ausgangssignale. Zusätzlich ist die Lösung der linearisierten Energiegleichun-



**Abb. 7.14.** Systemantwort (Gegenstrom) auf eine sinusförmige Schwankung des Umlaufstroms nach Gl. 7.60. Die Lösung der exakten Energiegleichungen ist durchgezogen, und die der linearisierten Energiegleichungen ist gestrichelt dargestellt.



**Abb. 7.15.** Systemantwort auf eine sinusförmige Schwankung des Massenstroms des Umlaufstroms nach Gl. 7.60. a) Kreuzstrom mit quervermishtem Umlaufstrom, b) Kreuzstrom mit quervermishten Hauptströmen, c) Gegenstrom. Links: Zeitlicher Verlauf der Schwankungen der dimensionslosen Austrittstemperatur des Hauptstroms II (die exakte Lösung ist durchgezogen, und die linearisierte Lösung gestrichelt dargestellt). Rechts: Fourieranalyse. Die Fourierkoeffizienten  $a_{\text{Fou}}$  sind durch Kreise gekennzeichnet und die Fourierkoeffizienten  $b_{\text{Fou}}$  durch Dreiecke.

gen eingetragen. Trotz der großen Massenstromschwankung stimmt die linearisierte Lösung mit der exakten Lösung gut überein.

Die Ausgangssignale im eingeschwungenen Zustand sind in Abb. 7.15 für alle drei Systeme dargestellt. Im rechten Teil der Abbildung ist die Fourieranalyse des mit den exakten Energiegleichungen berechneten Ausgangssignals dargestellt [42]. Mit den Fourierkoeffizienten  $a_{Fou}$  und  $b_{Fou}$  gilt für das exakte Ausgangssignal

$$\theta'_{1,ausII}(\tau) \approx \frac{1}{2}a_{Fou,0} + \sum_{l=1}^{n_{Fou}-1} \left[ a_{Fou,l} \frac{\cos 2\pi l \frac{\tau}{\Delta\tau_{Fou}}}{n_{Fou}} + b_{Fou,l} \frac{\sin 2\pi l \frac{\tau}{\Delta\tau_{Fou}}}{n_{Fou}} \right] + \frac{1}{2}a_{Fou,\frac{n}{2}} \cos \pi \frac{\tau}{\Delta\tau_{Fou}}. \quad (7.61)$$

Als Parameter für die Fourieranalyse wurde in Gl. 7.61

$$n_{Fou} = 2^{12} = 4096, \quad (7.62)$$

$$\Delta\tau_{Fou} = \frac{396}{12288} = 0.0322266 \quad (7.63)$$

gewählt.

Während die Lösung der linearisierten Energiegleichungen im eingeschwungenen Zustand mit der dimensionslosen Kreisfrequenz des Eingangssignals  $\Omega = \frac{2\pi}{22}$  um den Mittelwert Null schwingt, schwingt die Lösung der exakten Energiegleichungen mit der Grundfrequenz  $\Omega = \frac{2\pi}{22}$ , der jedoch ganzzahlige Vielfache dieser Frequenz überlagert sind, Abb. 7.15.

**Tabelle 7.9.** Zahlenwerte für den Fourierkoeffizienten  $a_{Fou,0}$ .

	$\frac{1}{2}a_{Fou,0}$
Kreustrom, Umlaufstrom quervermischt	-0,0124377
Kreuzstrom, Hauptströme quervermischt	-0,0110430
Gegenstrom	-0,0140313

Entscheidend ist, daß die Schwingung nicht um den Mittelwert Null erfolgt, wie der Fourierkoeffizient  $a_{Fou,0}$  zeigt, Tab. 7.9.

Ein pulsierender Umlaufstrom bewirkt eine Veränderung des zeitlich gemittelten Wärmeübertragungsverhaltens des Gesamtsystems. Diesen Sachverhalt geben die linearisierten Energiegleichungen nicht wieder.

## 8 Zusammenfassung

Für den stationären Betrieb eines Systems, das aus zwei Wärmeübertragern besteht, die durch einen umlaufenden Fluidstrom gekoppelt sind, gibt es einen optimalen Wert für die Größe des Wärmekapazitätsstroms des umlaufenden Fluids. Wenn das System mit diesem betrieben wird, erzielt man die größtmöglichen Temperaturänderungen bei vorgegebenen Eintrittstemperaturen und Wärmekapazitätsströmen beider Hauptströme. Von besonderem Interesse sind die Fälle, in denen der Wert des optimalen Wärmekapazitätsstroms des umlaufenden Fluids endlich ist. Werden zwei Apparate mit der gleichen Stromführung zusammengeschaltet, ist für den Gegenstrom die Existenz eines endlichen Wertes für den optimalen Umlaufstrom bereits bekannt [12] [10] [11]; er wurde für den Fall konstanter Wärmedurchgangskoeffizienten von Roetzel [11] berechnet. In der vorliegenden Arbeit wird die Existenz eines endlichen Wertes für den optimalen Umlaufstrom auch für den einseitig quervermischten Kreuzstrom mit quervermischten Hauptströmen und den reinen Kreuzstrom nachgewiesen. Für den einseitig quervermischten Kreuzstrom mit quervermischem Umlaufstrom ist der optimale Umlaufstrom unendlich groß [10].

Bei der Ermittlung des Optimums werden drei Fälle für die Wärmedurchgangskoeffizienten der beiden Wärmeübertrager unterschieden, und zwar der Fall unendlich großer Wärmedurchgangskoeffizienten, der Fall konstanter Wärmedurchgangskoeffizienten und der Fall, daß die Wärmedurchgangskoeffizienten von der Größe des Umlaufstroms abhängig sind.

Aufbauend auf den bekannten Verfahren, die für den Fall konstanter Wärmedurchgangskoeffizienten existieren [10] [11], wurde ein Verfahren für den Fall entwickelt, daß die Wärmedurchgangskoeffizienten von der Größe des Umlaufstroms abhängig sind. Als Beispiel wurden zwei gekoppelte Rippenrohrwärmeübertrager berechnet.

Für den Fall, daß zwei identische Wärmeübertrager gekoppelt sind und mit gleich großen Wärmekapazitätsströmen der Hauptströme betrieben werden, wird sowohl für konstante als auch von der Größe des Umlaufstroms abhängige Wärmedurchgangskoeffizienten ein grafisches Verfahren für die Optimumsuche vorgeschlagen. Es beruht auf den hier eingeführten Höhenlinienbildern, die jeweils für eine Stromführung gültig sind



und daher auch nur einmal für eine Stromführung berechnet werden müssen. In diese werden dann die Betriebscharakteristiken der Wärmeübertrager eingezeichnet, um das Optimum zu bestimmen. Die grafische Ermittlung des Optimums ist sehr anschaulich und umgeht die Extremwertrechnung.

Um das instationäre Verhalten von zwei gekoppelten Wärmeübertragern, die durch einen umlaufenden Fluidstrom gekoppelt sind, zu untersuchen, werden zunächst die interessierenden Eingangs- und Ausgangsgrößen des Systems bestimmt. Die fünf Eingangsgrößen sind die Schwankungen der Eintrittstemperaturen der beiden Hauptströme sowie die Schwankungen der Massenströme der beiden Hauptströme und des Umlaufstroms. Die Ausgangsgrößen sind die Schwankungen der Austrittstemperaturen der beiden Hauptströme.

Um die Gleichungen für die Berechnung der Temperaturfelder der Fluide herzuleiten, wurde die allgemeine Energiegleichung, die in jedem Punkt eines Strömungsfeldes gilt, räumlich integriert. Dabei sind die lokalen Wärmeübergangskoeffizienten und die adiabate Mischtemperatur eingeführt worden. Diese Herleitung zeigt, wie wichtige Informationen über die Temperaturfelder, die man berechnen will, auf die Kenntnis des Wärmeübergangskoeffizienten verlagert werden. Das Ergebnis sind partielle Differentialgleichungen für die Felder der adiabaten Mischtemperatur der Fluide. Die partiellen Differentialgleichungen für die Temperaturfelder der Wände werden mit dem ersten Hauptsatz hergeleitet. In den partiellen Differentialgleichungen werden die Gesamtgrößen in einen stationären Ausgangswert und eine Schwankungsgröße zerlegt. Das Ergebnis sind partielle Differentialgleichungen für die Temperaturschwankungen. Sie werden exakte Energiegleichungen genannt. Wenn die exakten Energiegleichungen um den stationären Ausgangszustand linearisiert werden, gelten sie nur für kleine Schwankungsgrößen. Sie haben sich mathematisch aber erheblich vereinfacht, da sie konstante Koeffizienten besitzen.

Nachdem die Anfangs-, Rand- und Kopplungsbedingungen formuliert worden sind, werden die Gleichungen mit der Laplace-Transformation und dem Finite-Differenzen-Verfahren gelöst. Die exakten Gleichungen lassen sich mit dem Finite-Differenzen-Verfahren immer lösen, mit der Laplace-Transformation aber nur, wenn sich die Massenströme zu Prozeßbeginn sprunghaft ändern oder wenn keine Massenstromschwankungen auftreten.

Will man mit der Laplace-Transformation Prozesse berechnen, bei denen beliebige

Massenstromschwankungen auftreten, müssen die linearisierten Energiegleichungen gelöst werden, d.h. die Massenstromschwankungen müssen klein sein.

Bei der Laplace-Transformation wird der numerische Algorithmus von Honig [39] für die Rücktransformation in den Zeitbereich verwendet. Dieser Algorithmus hat sich im Rahmen dieser Arbeit bewährt. Er ist robust gegenüber extremen Parametern, wie sie bei Wärmeübertragern vorliegen, in denen Wärme von einem Gasstrom an einen Flüssigkeitsstrom übertragen wird.

Beim Finite-Differenzen-Verfahren wird im Fall von Massenstromschwankungen für jeden Zeitschritt ein neues Rechnetz erzeugt, und beim Gegenstrom-Wärmeübertrager wird in jedem Zeitschritt gleichzeitig auf zwei Netzen gerechnet. Dies hat seine Ursache darin, daß sich Informationen im System in Strömungsrichtung der Fluide mit der Strömungsgeschwindigkeit ausbreiten. Um numerische Dispersion und numerische Dämpfung zu minimieren, muß diese Tatsache bei der Netzgenerierung berücksichtigt werden. Dazu wurde ein Kriterium hergeleitet, das die Ortsdiskretisierung in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite für jeden Zeitschritt festlegt.

Aufgrund der inneren Zirkulation besitzt das gekoppelte System grundsätzlich andere Eigenschaften als die Einzelapparate, aus denen es zusammengesetzt ist. Dies zeigt sich am deutlichsten an den Beispielen, in denen der Massenstrom des umlaufenden Fluids sprungförmig abfällt. Die Austrittstemperaturen schwingen in diesem Fall mit fallender Amplitude, bis ein neuer stationärer Zustand erreicht wird. Eine Temperaturschwingung, die durch einen Massenstromabfall induziert wird, existiert nicht für die Einzelapparate, die hier behandelt worden sind.

## A Stationärer Ausgangszustand

Erläuterungen zu diesem Anhang finden sich in Abschnitt 4.11.

Die verwendeten dimensionslosen Kenngrößen sind folgendermaßen definiert:

$$\bar{N}_{1M} = \frac{\bar{\alpha}_{1M} A_{1M}}{\bar{W}_{1M}}, \quad R_{2,1M} = \frac{\bar{W}_2}{\bar{W}_{1M}}, \quad R_{1M,2} = \frac{\bar{W}_{1M}}{\bar{W}_2} \quad \text{mit } M = I, II$$

$$\bar{N}_{2M} = \frac{\bar{\alpha}_{2M} A_{2M}}{\bar{W}_{2M}} \quad \text{mit } M = I, II, r, l.$$

### A.1 Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom unvermischt, Umlaufstrom quervermischt)

#### Energiegleichungen

Hauptstrom:

$$-\frac{\partial \bar{\theta}_{1M}}{\partial \xi_M} - \bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Umlaufstrom:

$$-\frac{d\bar{\theta}_{2M}}{d\eta_M} - \bar{N}_{2M}(\bar{\theta}_{2M} - \int_0^1 \bar{\theta}_{WM} d\xi_M) = 0 \quad (\text{A.2})$$

wärmeübertragende Wand:

$$\bar{\theta}_{WM} = \frac{\bar{N}_{1M}\bar{\theta}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}\bar{\theta}_{2M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}} \quad (\text{A.3})$$

#### Randbedingungen

$$\bar{\theta}_{1M}(\xi_M = 0, \eta_M) = \bar{\theta}_{1, \text{ein } M} \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{\theta}_{2M}(\eta_M = 0) = \bar{\theta}_{2, \text{ein } M} \quad (\text{A.5})$$

## Abkürzungen

$$NTU_{1M} = \frac{\bar{N}_{1M}\bar{N}_{2M}R_{2,1M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}} \quad (A.6)$$

$$k_{0,2qM} = \frac{1}{R_{2,1M}} (1 - e^{-NTU_{1M}}) \quad (A.7)$$

## Temperaturfelder

$$\bar{\theta}_{1M}(\xi_M, \eta_M) = (1 - e^{-NTU_{1M}\xi_M}) \bar{\theta}_{2M}(\eta_M) + e^{-NTU_{1M}\xi_M} \bar{\theta}_{1, \text{ein } M} \quad (A.8)$$

$$\bar{\theta}_{2M}(\eta_M) = (1 - e^{-k_{0,2qM}\eta_M}) \bar{\theta}_{1, \text{ein } M} + e^{-k_{0,2qM}\eta_M} \bar{\theta}_{2, \text{ein } M} \quad (A.9)$$

## Austrittstemperaturen

$$\bar{\theta}_{1, \text{aus } M} = \int_0^1 \bar{\theta}_{1M}(\xi_M = 1, \eta_M) d\eta_M \quad (A.10)$$

$$= [1 - R_{2,1M}(1 - e^{-k_{0,2qM}})] \bar{\theta}_{1, \text{ein } M} + R_{2,1M}(1 - e^{-k_{0,2qM}}) \bar{\theta}_{2, \text{ein } M} \quad (A.11)$$

$$\bar{\theta}_{2, \text{aus } M} = (1 - e^{-k_{0,2qM}}) \bar{\theta}_{1, \text{ein } M} + e^{-k_{0,2qM}} \bar{\theta}_{2, \text{ein } M} \quad (A.12)$$

## A.2 Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom quervermischt, Umlaufstrom unvermischt)

### Energiegleichungen

Hauptstrom:

$$-\frac{d\bar{\theta}_{1M}}{d\xi_M} - \bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \int_0^1 \bar{\theta}_{WM} d\eta_M) = 0 \quad (A.13)$$

Umlaufstrom:

$$-\frac{\partial \bar{\theta}_{2M}}{\partial \eta_M} - \bar{N}_{2M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) = 0 \quad (A.14)$$

wärmeübertragende Wand:

$$\bar{\theta}_{WM} = \frac{\bar{N}_{1M}\bar{\theta}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}\bar{\theta}_{2M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}} \quad (A.15)$$

## Randbedingungen

$$\bar{\theta}_{1M}(\xi_M = 0) = \bar{\theta}_{1,einM} \quad (\text{A.16})$$

$$\bar{\theta}_{2M}(\xi_M, \eta_M = 0) = \bar{\theta}_{2,einM} \quad (\text{A.17})$$

## Abkürzungen

$$NTU_{1M} = \frac{\bar{N}_{1M}\bar{N}_{2M}R_{2,1M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}} \quad (\text{A.18})$$

$$k_{0,1qM} = R_{2,1M} \left( 1 - e^{\frac{-NTU_{1M}}{R_{2,1M}}} \right) \quad (\text{A.19})$$

## Temperaturfelder

$$\bar{\theta}_{1M}(\xi_M) = (1 - e^{-k_{0,1qM}\xi_M})\bar{\theta}_{2,einM} + e^{-k_{0,1qM}\xi_M}\bar{\theta}_{1,einM} \quad (\text{A.20})$$

$$\bar{\theta}_{2M}(\xi_M, \eta_M) = (1 - e^{-\frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}}\eta_M})\bar{\theta}_{1M}(\xi_M) + e^{-\frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}}\eta_M}\bar{\theta}_{2,einM} \quad (\text{A.21})$$

## Austrittstemperaturen

$$\bar{\theta}_{1,aus} = \bar{\theta}_{1M}(\xi_M = 1) \quad (\text{A.22})$$

$$= (1 - e^{-k_{0,1qM}})\bar{\theta}_{2,einM} + e^{-k_{0,1qM}}\bar{\theta}_{1,einM} \quad (\text{A.23})$$

$$\bar{\theta}_{2,aus} = \int_0^1 \bar{\theta}_{2M}(\xi_M, \eta_M = 1) d\xi_M \quad (\text{A.24})$$

$$= \left[ 1 - \frac{1}{R_{2,1M}}(1 - e^{-k_{0,1qM}}) \right] \bar{\theta}_{2,einM} + \frac{1}{R_{2,1M}}(1 - e^{-k_{0,1qM}})\bar{\theta}_{1,einM} \quad (\text{A.25})$$

## A.3 Gegenstrom

### Energiegleichungen

Hauptstrom:

$$-\frac{d\bar{\theta}_{1M}}{d\xi_M} - \bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM}) = 0 \quad (\text{A.26})$$

Umlaufstrom:

$$\frac{d\bar{\theta}_{2M}}{d\xi_M} - \bar{N}_{2M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) = 0 \quad (\text{A.27})$$

wärmeübertragende Wand:

$$\bar{\theta}_{WM} = \frac{\bar{N}_{1M}\bar{\theta}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}\bar{\theta}_{2M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}} \quad (\text{A.28})$$

## Randbedingungen

$$\bar{\theta}_{1M}(\xi_M = 0) = \bar{\theta}_{1,einM} \quad (\text{A.29})$$

$$\bar{\theta}_{2M}(\xi_M = 1) = \bar{\theta}_{2,einM} \quad (\text{A.30})$$

## Abkürzungen

$$NTU_{1M} = \frac{\bar{N}_{1M}\bar{N}_{2M}R_{2,1M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}} \quad (\text{A.31})$$

$$h_{0M} = (R_{1,2M} - 1)NTU_{1M} \quad (\text{A.32})$$

## Temperaturfelder für $R_{1,2M} \neq 1$

$$\bar{\theta}_{1M}(\xi_M) = \frac{e^{h_{0M}\xi_M} - R_{1,2M}e^{h_{0M}}}{1 - R_{1,2M}e^{h_{0M}}} \bar{\theta}_{1,einM} + \frac{1 - e^{h_{0M}\xi_M}}{1 - R_{1,2M}e^{h_{0M}}} \bar{\theta}_{2,einM} \quad (\text{A.33})$$

$$\bar{\theta}_{2M}(\xi_M) = \frac{R_{1,2M}e^{h_{0M}\xi_M} - R_{1,2M}e^{h_{0M}}}{1 - R_{1,2M}e^{h_{0M}}} \bar{\theta}_{1,einM} + \frac{1 - R_{1,2M}e^{h_{0M}\xi_M}}{1 - R_{1,2M}e^{h_{0M}}} \bar{\theta}_{2,einM} \quad (\text{A.34})$$

## Austrittstemperaturen für $R_{1,2M} \neq 1$

$$\bar{\theta}_{1,ausM} = \bar{\theta}_{1M}(\xi_M = 1) \quad (\text{A.35})$$

$$= \frac{(1 - R_{1,2M})e^{h_{0M}}}{1 - R_{1,2M}e^{h_{0M}}} \bar{\theta}_{1,einM} + \frac{1 - e^{h_{0M}}}{1 - R_{1,2M}e^{h_{0M}}} \bar{\theta}_{2,einM} \quad (\text{A.36})$$

$$\bar{\theta}_{2,ausM} = \bar{\theta}_{2M}(\xi_M = 0) \quad (\text{A.37})$$

$$= \frac{R_{1,2M}(1 - e^{h_{0M}})}{1 - R_{1,2M}e^{h_{0M}}} \bar{\theta}_{1,einM} + \frac{1 - R_{1,2M}}{1 - R_{1,2M}e^{h_{0M}}} \bar{\theta}_{2,einM} \quad (\text{A.38})$$

### Temperaturfelder für $R_{2,1M} = 1$

$$\bar{\theta}_{1M}(\xi_M) = \frac{1 + NTU_{1M} - NTU_{1M}\xi_M}{1 + NTU_{1M}} \bar{\theta}_{1,einM} + \frac{NTU_{1M}\xi_M}{1 + NTU_{1M}} \bar{\theta}_{2,einM} \quad (A.39)$$

$$\bar{\theta}_{2M}(\xi_M) = \frac{NTU_{1M} - NTU_{1M}\xi_M}{1 + NTU_{1M}} \bar{\theta}_{1,einM} + \frac{1 + NTU_{1M}\xi_M}{1 + NTU_{1M}} \bar{\theta}_{2,einM} \quad (A.40)$$

### Austrittstemperaturen für $R_{1,2M} = 1$

$$\bar{\theta}_{1,ausM} = \bar{\theta}_{1M}(\xi_M = 1) \quad (A.41)$$

$$= \frac{1}{1 + NTU_{1M}} \bar{\theta}_{1,einM} + \frac{NTU_{1M}}{1 + NTU_{1M}} \bar{\theta}_{2,einM} \quad (A.42)$$

$$\bar{\theta}_{2,ausM} = \bar{\theta}_{2M}(\xi_M = 0) \quad (A.43)$$

$$= \frac{NTU_{1M}}{1 + NTU_{1M}} \bar{\theta}_{1,einM} + \frac{1}{1 + NTU_{1M}} \bar{\theta}_{2,einM} \quad (A.44)$$

## A.4 Verbindungsleitung

### Energiegleichungen

Umlaufstrom:

$$-\frac{d\bar{\theta}_{2M}}{d\zeta_M} = 0 \quad (A.45)$$

Rohrwand:

$$\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM} = 0 \quad (A.46)$$

### Randbedingung

$$\bar{\theta}_{2M}(\zeta_M = 0) = \bar{\theta}_{2,einM} \quad (A.47)$$

### Temperaturfelder

$$\bar{\theta}_{2M}(\zeta_M) = \bar{\theta}_{2,einM} \quad (A.48)$$

$$\bar{\theta}_{WM}(\zeta_M) = \bar{\theta}_{2,einM} \quad (A.49)$$

## A.5 Kopplung

Die Gleichungen gelten für

$$\bar{\theta}_{1,einI} = 1 \quad (A.50)$$

$$\bar{\theta}_{1,einII} = 0. \quad (A.51)$$

		$\bar{\theta}_{2,einI}$
Gegenstrom		
$R_{1,2I}$	$R_{1,2II}$	
$\neq 1$	$\neq 1$	$\frac{R_{1,2I}(1-e^{h_{0I}})(1-R_{1,2II})}{(1-R_{1,2I}e^{h_{0I}})(1-R_{1,2II}e^{h_{0II}})-(1-R_{1,2I})(1-R_{1,2II})}$
$\neq 1$	$= 1$	$\frac{R_{1,2I}(1-e^{h_{0I}})}{(1-R_{1,2I}e^{h_{0I}})(1+NTU_{1II})-(1-R_{1,2I})}$
$= 1$	$\neq 1$	$\frac{NTU_{1I}(1-R_{1,2II})}{(1+NTU_{1I})(1-R_{1,2II}e^{h_{0II}})-(1-R_{1,2II})}$
$= 1$	$= 1$	$\frac{NTU_{1I}}{NTU_{1I}NTU_{1II}+NTU_{1I}+NTU_{1II}}$
Kreuzstrom		
Umlaufstrom quervermischt		$\frac{e^{-k_{0,2qII}}(e^{-k_{0,2qI}}-1)}{e^{-(k_{0,2qI}+k_{0,2qII})}-1}$
Hauptströme quervermischt		$\frac{\frac{1-e^{-k_{0,1qI}}}{R_{2,1I}} \left(1 - \frac{1-e^{-k_{0,1qII}}}{R_{2,1II}}\right)}{\frac{1-e^{-k_{0,1qI}}}{R_{2,1I}} - \frac{1-e^{-k_{0,1qI}}}{R_{2,1I}} \frac{1-e^{-k_{0,1qII}}}{R_{2,1II}} + \frac{1-e^{-k_{0,1qII}}}{R_{2,1II}}}$

		$\bar{\theta}_{2,einII}$
Gegenstrom		
$R_{1,2I}$	$R_{1,2II}$	
$\neq 1$	$\neq 1$	$\frac{R_{1,2I}(1-e^{h_{0I}})(1-R_{1,2II}e^{h_{0II}})}{(1-R_{1,2I}e^{h_{0I}})(1-R_{1,2II}e^{h_{0II}})-(1-R_{1,2I})(1-R_{1,2II})}$
$\neq 1$	$= 1$	$\frac{R_{1,2I}(1-e^{h_{0I}})(1+NTU_{1II})}{(1-R_{1,2I}e^{h_{0I}})(1+NTU_{1II})-(1-R_{1,2I})}$
$= 1$	$\neq 1$	$\frac{NTU_{1I}(1-R_{1,2II}e^{h_{0II}})}{(1+NTU_{1I})(1-R_{1,2II}e^{h_{0II}})-(1-R_{1,2II})}$
$= 1$	$= 1$	$\frac{NTU_{1I}(1+NTU_{1II})}{NTU_{1I}NTU_{1II}+NTU_{1I}+NTU_{1II}}$
Kreuzstrom		
Umlaufstrom quervermischt		$\frac{e^{-k_{0,2qI}}-1}{e^{-(k_{0,2qI}+k_{0,2qII})}-1}$
Hauptströme quervermischt		$\frac{\frac{1-e^{-k_{0,1qI}}}{R_{2,1I}}}{\frac{1-e^{-k_{0,1qI}}}{R_{2,1I}} - \frac{1-e^{-k_{0,1qI}}}{R_{2,1I}} \frac{1-e^{-k_{0,1qII}}}{R_{2,1II}} + \frac{1-e^{-k_{0,1qII}}}{R_{2,1II}}}$



## B Differentialgleichungen zur Berechnung der Felder der dimensionslosen Temperaturschwankungen

Die verwendeten dimensionslosen Parameter sind folgendermaßen definiert:

$$\bar{N}_{1M} = \frac{\bar{\alpha}_{1M} A_{1M}}{\bar{W}_{1M}}, \quad N'_{1M}(\tau) = \frac{\alpha'_{1M} A_{1M}}{\bar{W}_{1M}}, \quad R_{2,1M} = \frac{\bar{W}_2}{\bar{W}_{1M}},$$

$$\sigma_{1M}(\tau) = \frac{w'_{1M}}{\bar{w}_{1M}}, \quad \kappa_{1M} = \frac{t_{v,1M}}{t_B} \quad \text{mit } M = I, II$$

$$\bar{N}_{2M} = \frac{\bar{\alpha}_{2M} A_{2M}}{\bar{W}_{2M}}, \quad N'_{2M}(\tau) = \frac{\alpha'_{2M} A_{2M}}{\bar{W}_{2M}},$$

$$\sigma_2(\tau) = \frac{w'_{2M}}{\bar{w}_{2M}}, \quad \kappa_{2M} = \frac{t_{v,2M}}{t_B} \quad \text{mit } M = I, II, r, l$$

$$\omega_I = \frac{C_{WI}}{C_{II}} \kappa_{1I}, \quad \omega_{II} = \frac{C_{WII}}{C_{III}} \kappa_{1II}, \quad \omega_r = \frac{C_{Wr}}{C_{2r}} \kappa_{2r}, \quad \omega_l = \frac{C_{Wl}}{C_{2l}} \kappa_{2l}.$$

Mit den Parametern wird Gl. 4.70 in dimensionsloser Form dargestellt:

$$N'_{1M} = [(1 + \sigma_{1M})^{m_{1M}} - 1] \bar{N}_{1M} \quad M = I, II \quad (\text{B.1})$$

$$N'_{2M} = [(1 + \sigma_2)^{m_{2M}} - 1] \bar{N}_{2M} \quad M = I, II, r, l. \quad (\text{B.2})$$

Die Gleichungen B.1 und B.2 geben wieder, daß die Schwankung des Wärmeübergangskoeffizienten von der Schwankung der Strömungsgeschwindigkeit abhängt.

### B.1 Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom unvermischt, Umlaufstrom quervermischt)

#### B.1.1 Exakte Energiegleichungen

Hauptstrom:

$$-(1 + \sigma_{1M}) \frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \xi_M} - (\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\theta'_{1M} - \theta'_{WM})$$

$$-(N'_{1M} - \sigma_{1M}\bar{N}_{1M})(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM}) = \kappa_{1M} \frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \tau} \quad (\text{B.3})$$

Umlaufstrom:

$$\begin{aligned} -(1 + \sigma_2) \frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \eta_M} - (\bar{N}_{2M} + N'_{2M})(\theta'_{2M} - \int_0^1 \theta'_{WM} d\xi_M) \\ -(N'_{2M} - \sigma_2 \bar{N}_{2M})(\bar{\theta}_{2M} - \int_0^1 \bar{\theta}_{WM} d\xi_M) = \kappa_{2M} \frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

wärmeübertragende Wand:

$$\begin{aligned} N'_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM}) + (\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\theta'_{1M} - \theta'_{WM}) + \\ N'_{2M}R_{2,1M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) + (\bar{N}_{2M} + N'_{2M})R_{2,1M}(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) = \omega_M \frac{\partial \theta'_{WM}}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

## B.1.2 Linearisierte Energiegleichungen

Hauptstrom:

$$-\frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \xi_M} - \bar{N}_{1M}(\theta'_{1M} - \theta'_{WM}) - (m_{1M} - 1)\bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM})\sigma_{1M} = \kappa_{1M} \frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \tau} \quad (\text{B.6})$$

Umlaufstrom:

$$-\frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \eta_M} - \bar{N}_{2M}(\theta'_{2M} - \int_0^1 \theta'_{WM} d\xi_M) - (m_{2M} - 1)\bar{N}_{2M}(\bar{\theta}_{2M} - \int_0^1 \bar{\theta}_{WM} d\xi_M)\sigma_2 = \kappa_{2M} \frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \tau} \quad (\text{B.7})$$

wärmeübertragende Wand:

$$\begin{aligned} m_{1M}\bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM})\sigma_{1M} + \bar{N}_{1M}(\theta'_{1M} - \theta'_{WM}) + \\ m_{2M}\bar{N}_{2M}R_{2,1M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM})\sigma_2 + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) = \omega_M \frac{\partial \theta'_{WM}}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

## B.2 Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom quervermischt, Umlaufstrom unvermischt)

### B.2.1 Exakte Gleichungen

Hauptstrom:

$$\begin{aligned} -(1 + \sigma_{1M}) \frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \xi_M} - (\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\theta'_{1M} - \int_0^1 \theta'_{WM} d\eta_M) \\ -(N'_{1M} - \sigma_{1M}\bar{N}_{1M})(\bar{\theta}_{1M} - \int_0^1 \bar{\theta}_{WM} d\eta_M) = \kappa_{1M} \frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Umlaufstrom:

$$\begin{aligned} -(1 + \sigma_2) \frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \eta_M} - (\bar{N}_{2M} + N'_{2M})(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) \\ - (N'_{2M} - \sigma_{2M} \bar{N}_{2M})(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) = \kappa_{2M} \frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (B.10)$$

wärmeübertragende Wand:

$$\begin{aligned} N'_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM}) + (\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\theta'_{1M} - \theta'_{WM}) + \\ N'_{2M} R_{2,1}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) + (\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) R_{2,1}(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) = \omega_M \frac{\partial \theta'_{WM}}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (B.11)$$

## B.2.2 Linearisierte Gleichungen

Hauptstrom:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \xi_M} - \bar{N}_{1M}(\theta'_{1M} - \int_0^1 \theta'_{WM} d\eta_M) \\ - (m_{1M} - 1) \bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \int_0^1 \bar{\theta}_{WM} d\eta_M) \sigma_{1M} = \kappa_{1M} \frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (B.12)$$

Umlaufstrom:

$$-\frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \eta_M} - \bar{N}_{2M}(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) - (m_{2M} - 1) \bar{N}_{2M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) \sigma_2 = \kappa_{2M} \frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \tau} \quad (B.13)$$

wärmeübertragende Wand:

$$\begin{aligned} m_{1M} \bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM}) \sigma_{1M} + \bar{N}_{1M}(\theta'_{1M} - \theta'_{WM}) + \\ m_{2M} \bar{N}_{2M} R_{2,1}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) \sigma_2 + \bar{N}_{2M} R_{2,1}(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) = \omega_M \frac{\partial \theta'_{WM}}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (B.14)$$

## B.3 Gegenstrom

### B.3.1 Exakte Energiegleichungen

Hauptstrom:

$$\begin{aligned} -(1 + \sigma_{1M}) \frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \xi_M} - (\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\theta'_{1M} - \theta'_{WM}) \\ - (N'_{1M} - \sigma_{1M} \bar{N}_{1M})(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM}) = \kappa_{1M} \frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (B.15)$$

Umlaufstrom:

$$(1 + \sigma_2) \frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \xi_M} - (\bar{N}_{2M} + N'_{2M})(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) - (N'_{2M} - \sigma_{2M} \bar{N}_{2M})(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) = \kappa_{2M} \frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \tau} \quad (\text{B.16})$$

wärmeübertragende Wand:

$$N'_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM}) + (\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\theta'_{1M} - \theta'_{WM}) + N'_{2M} R_{2,1M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) + (\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) R_{2,1M}(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) = \omega_M \frac{\partial \theta'_{WM}}{\partial \tau} \quad (\text{B.17})$$

### B.3.2 Linearisierte Gleichungen

Hauptstrom:

$$-\frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \xi_M} - \bar{N}_{1M}(\theta'_{1M} - \theta'_{WM}) - (m_{1M} - 1) \bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM}) \sigma_{1M} = \kappa_{1M} \frac{\partial \theta'_{1M}}{\partial \tau} \quad (\text{B.18})$$

Umlaufstrom:

$$\frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \xi_M} - \bar{N}_{2M}(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) - (m_{2M} - 1) \bar{N}_{2M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) \sigma_2 = \kappa_{2M} \frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \tau} \quad (\text{B.19})$$

wärmeübertragende Wand:

$$m_{1M} \bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM}) \sigma_{1M} + \bar{N}_{1M}(\theta'_{1M} - \theta'_{WM}) + m_{2M} \bar{N}_{2M} R_{2,1M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) \sigma_2 + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) = \omega_M \frac{\partial \theta'_{WM}}{\partial \tau} \quad (\text{B.20})$$

## B.4 Verbindungsleitung

### B.4.1 Exakte Energiegleichungen

Umlaufstrom:

$$-(1 + \sigma_2) \frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \zeta_M} - (\bar{N}_{2M} + N'_{2M})(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) = \kappa_{2M} \frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \tau} \quad (\text{B.21})$$

Rohrwand:

$$(\bar{N}_{2M} + N'_{2M})(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) = \omega_M \frac{\partial \theta'_{WM}}{\partial \tau} \quad (\text{B.22})$$

### B.4.2 Linearisierte Energiegleichungen

Umlaufstrom:

$$-\frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \zeta_M} - \tilde{N}_{2M}(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) = \kappa_{2M} \frac{\partial \theta'_{2M}}{\partial \tau} \quad (\text{B.23})$$

Rohrwand:

$$\tilde{N}_{2M}(\theta'_{2M} - \theta'_{WM}) = \omega_M \frac{\partial \theta'_{WM}}{\partial \tau} \quad (\text{B.24})$$

## C Lösung im Frequenzbereich

In den Abschnitten C.1 bis C.4 werden die Untersysteme zunächst isoliert berechnet. Dabei wird unterschiedlich vorgegangen:

- Bei den Kreuzstrom-Wärmeübertragern werden die Schwankungen der Eintrittstemperaturen des umlaufenden Fluids als Randbedingungen vorgegeben und bleiben zunächst unbestimmt.
- Beim Gegenstrom-Wärmeübertrager bleibt zunächst eine unbestimmte Konstante offen.
- Bei den Verbindungsleitungen wird, wie bei den Kreuzstrom-Wärmeübertragern, die Schwankung der Eintrittstemperatur des umlaufenden Fluids als Randbedingung vorgegeben und bleibt zunächst unbestimmt.

In Abschnitt C.5 werden mit Hilfe der Kopplungsbedingungen Gleichungssysteme aufgestellt, mit denen für die Kreuzstrom-Wärmeübertrager und Verbindungsleitungen die Schwankungen der Eintrittstemperaturen des umlaufenden Fluids und für die Gegenstrom-Wärmeübertrager die unbestimmten Konstanten berechnet werden.

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß die Gleichungen, die in den Abschnitten C.1 bis C.3 zusammengestellt sind, auch direkt für die Berechnung einzelner Wärmeübertrager verwendet werden können.

Die exakten Energiegleichungen werden nur für den Fall transformiert, daß ihre Koeffizienten konstant sind und daß der inhomogene Teil zeitunabhängig ist.

### C.1 Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom unvermischt, Umlaufstrom quervermischt)

Die exakten Energiegleichungen B.3 bis B.5 lauten im Frequenzbereich für den Fluidstrom 1:

$$-(1 + \sigma_{1M}) \frac{\partial \tilde{\theta}'_{1M}}{\partial \xi_M} - (\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\tilde{\theta}'_{1M} - \tilde{\theta}'_{WM})$$

$$-\frac{(N'_{1M} - \sigma_{1M}\bar{N}_{1M})(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM})}{s} = \kappa_{1M}s\tilde{\theta}'_{1M}, \quad (C.1)$$

für den Fluidstrom 2:

$$\begin{aligned} -(1 + \sigma_2)\frac{\partial\tilde{\theta}'_{2M}}{\partial\eta_M} - (\bar{N}_{2M} + N'_{2M})(\bar{\theta}'_{2M} - \int_0^1 \tilde{\theta}'_{WM}d\xi_M) \\ - \frac{(N'_{2M} - \sigma_{2M}\bar{N}_{2M})(\bar{\theta}_{2M} - \int_0^1 \bar{\theta}_{WM}d\xi_M)}{s} = \kappa_{2M}s\tilde{\theta}'_{2M} \end{aligned} \quad (C.2)$$

und für die wärmeübertragende Wand:

$$\begin{aligned} \frac{N'_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM})}{s} + (\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\bar{\theta}'_{1M} - \bar{\theta}'_{WM}) + \\ \frac{N'_{2M}R_{2,1}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM})}{s} + (\bar{N}_{2M} + N'_{2M})R_{2,1}(\bar{\theta}'_{2M} - \bar{\theta}'_{WM}) = \omega_M s \tilde{\theta}'_{WM}. \end{aligned} \quad (C.3)$$

Die linearisierten Energiegleichungen B.6 bis B.8 lauten im Frequenzbereich für den Fluidstrom 1:

$$-\frac{\partial\tilde{\theta}'_{1M}}{\partial\xi_M} - \bar{N}_{1M}(\bar{\theta}'_{1M} - \bar{\theta}'_{WM}) - (m_{1M} - 1)\bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM})\tilde{\sigma}_{1M} = \kappa_{1M}s\tilde{\theta}'_{1M}, \quad (C.4)$$

für den Fluidstrom 2:

$$-\frac{\partial\tilde{\theta}'_{2M}}{\partial\eta_M} - \bar{N}_{2M}(\bar{\theta}'_{2M} - \int_0^1 \tilde{\theta}'_{WM}d\xi_M) - (m_{2M} - 1)\bar{N}_{2M}(\bar{\theta}_{2M} - \int_0^1 \bar{\theta}_{WM}d\xi_M)\tilde{\sigma}_2 = \kappa_{2M}s\tilde{\theta}'_{2M} \quad (C.5)$$

und für die wärmeübertragende Wand:

$$\begin{aligned} m_{1M}\bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM})\tilde{\sigma}_{1M} + \bar{N}_{1M}(\bar{\theta}'_{1M} - \bar{\theta}'_{WM}) + \\ m_{2M}\bar{N}_{2M}R_{2,1M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM})\tilde{\sigma}_2 + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}(\bar{\theta}'_{2M} - \bar{\theta}'_{WM}) = \omega_M s \tilde{\theta}'_{WM}. \end{aligned} \quad (C.6)$$

Für die Berechnung in diesem Abschnitt sind die dimensionslosen Schwankungen der Eintrittstemperaturen beider Fluidströme als Randbedingungen vorgegeben:

$$\theta'_{1M}(\xi_M = 0, \eta_M, \tau) = \theta'_{1, \text{ein}M}(\tau) \quad (C.7)$$

$$\theta'_{2M}(\eta_M = 0, \tau) = \theta'_{2, \text{ein}M}(\tau). \quad (C.8)$$

Die Gln. C.7 und C.8 lauten im Frequenzbereich:

$$\tilde{\theta}'_{1M}(\xi_M = 0, \eta_M, s) = \tilde{\theta}'_{1, \text{ein}M}(s) \quad (C.9)$$

$$\tilde{\theta}'_{2M}(\eta_M = 0, s) = \tilde{\theta}'_{2, \text{ein}M}(s). \quad (C.10)$$

Die Randbedingungen für die Hauptströme, Gl. C.7, sind tatsächliche Randbedingungen des zusammengeschalteten Systems. Sie sind identisch mit den Gln. 4.100 und 4.101. Im Gegensatz dazu sind die Randbedingungen für den Umlaufstrom, Gl. C.8, Hilfsgleichungen. Die dimensionslosen Schwankungen der Eintrittstemperaturen des Umlaufstroms sind zunächst unbekannte Zeitfunktionen, die in Anh. C.5 explizit für das zusammengeschaltete System bestimmt werden.

Aus den transformierten Energiegleichungen für die Fluidströme, Gln. C.1 und C.2 bzw. C.4 und C.5, wird die dimensionslose Wandtemperatur und deren Schwankung mit Hilfe der Gln. C.3 bzw. C.6 und A.3 eliminiert. Anschließend werden die exakte und die linearisierte Fassung in einer gemeinsamen Form dargestellt:

$$-\frac{\partial \tilde{\theta}'_{1M}}{\partial \xi_M} + a_{0M} \tilde{\theta}'_{1M} + b_{0M} \tilde{\theta}'_{2M} = \psi_{2q,1M} e^{-NTU_{1M} \xi_M} e^{-k_{0,2qM} \eta_M} \quad (C.11)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\theta}'_{2M}}{\partial \eta_M} + c_{0M} \int_0^1 \tilde{\theta}'_{1M} d\xi_M + d_{0M} \tilde{\theta}'_{2M} = \psi_{2q,2M} e^{-k_{0,2qM} \eta_M}. \quad (C.12)$$

Wenn das System aus den Gln. C.11 und C.12 die exakte Fassung der Energiegleichungen darstellt, gilt für seine Parameter:

$$a_{0M} = -\frac{(\bar{N}_{1M} + N'_{1M}) [R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s]}{[\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s] (1 + \sigma_{1M})} - \frac{\kappa_{1M} s}{1 + \sigma_{1M}} \quad (C.13)$$

$$b_{0M} = \frac{(\bar{N}_{1M} + N'_{1M}) R_{2,1M} (\bar{N}_{2M} + N'_{2M})}{[\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s] (1 + \sigma_{1M})} \quad (C.14)$$

$$c_{0M} = \frac{(\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\bar{N}_{2M} + N'_{2M})}{[\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s] (1 + \sigma_2)} \quad (C.15)$$

$$d_{0M} = -\frac{(\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + \omega_M s)(\bar{N}_{2M} + N'_{2M})}{[\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s] (1 + \sigma_2)} - \frac{\kappa_{2M} s}{1 + \sigma_2} \quad (C.16)$$

$$\psi_{2q,1M} = \left\{ -\frac{(\bar{N}_{1M} + N'_{1M}) R_{2,1M} (N'_{1M} \bar{N}_{2M} - N'_{2M} \bar{N}_{1M})}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}) [\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s] (1 + \sigma_{1M})} + \frac{(N'_{1M} - \sigma_{1M} \bar{N}_{1M}) \bar{N}_{2M} R_{2,1M}}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}) (1 + \sigma_{1M})} \right\} (\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}) \quad (C.17)$$

$$\psi_{2q,2M} = \left\{ -\frac{(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) R_{2,1M} (N'_{1M} \bar{N}_{2M} - N'_{2M} \bar{N}_{1M})}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}) [\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s] (1 + \sigma_2)} - \frac{(N'_{2M} - \sigma_2 \bar{N}_{2M}) \bar{N}_{1M}}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}) (1 + \sigma_2)} \right\} \frac{1 - e^{-NTU_{1M}}}{NTU_{1M}} (\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}). \quad (C.18)$$



Wenn das System aus den Gln. C.11 und C.12 die linearisierte Fassung der Energiegleichungen darstellt, gilt für seine Parameter:

$$a_{0M} = -\frac{\bar{N}_{1M}(\bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s)}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s} - \kappa_{1M}s \quad (C.19)$$

$$b_{0M} = \frac{\bar{N}_{1M}\bar{N}_{2M}R_{2,1M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s} \quad (C.20)$$

$$c_{0M} = \frac{\bar{N}_{1M}\bar{N}_{2M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s} \quad (C.21)$$

$$d_{0M} = -\frac{(\bar{N}_{1M} + \omega_M s)\bar{N}_{2M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s} - \kappa_{2M}s \quad (C.22)$$

$$\psi_{2q,1M} = \left\{ -\frac{\bar{N}_{1M}^2\bar{N}_{2M}R_{2,1M}(m_{1M}\tilde{\sigma}_{1M} - m_{2M}\tilde{\sigma}_{2M})}{(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M})(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s)} + \frac{(m_{1M} - 1)\bar{N}_{1M}\bar{N}_{2M}R_{2,1M}\tilde{\sigma}_{1M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}} \right\} (\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}) \quad (C.23)$$

$$\psi_{2q,2M} = \left\{ -\frac{\bar{N}_{1M}\bar{N}_{2M}^2R_{2,1M}(m_{1M}\tilde{\sigma}_{1M} - m_{2M}\tilde{\sigma}_{2M})}{(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M})(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s)} - \frac{(m_{2M} - 1)\bar{N}_{1M}\bar{N}_{2M}\tilde{\sigma}_{2M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}} \right\} \frac{1 - e^{-NTU_{1M}}}{NTU_{1M}} (\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}) \quad (C.24)$$

Für die Darstellung der Lösung werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\chi_{2q,1M} = \frac{e^{a_{0M}} - 1}{a_{0M}} \quad (C.25)$$

$$\chi_{2q,2M} = -\frac{b_{0M}}{a_{0M}} \left( \frac{a_{0M} - e^{a_{0M}} + 1}{a_{0M}} \right) \quad (C.26)$$

$$\chi_{2q,3M} = \frac{\psi_{2q,1M}}{a_{0M} + NTU_{1M}} \left( \frac{1 - e^{-NTU_{1M}}}{NTU_{1M}} - \frac{e^{a_{0M}} - 1}{a_{0M}} \right) \quad (C.27)$$

$$\epsilon_{2q,1M} = d_{0M} + c_{0M}\chi_{2q,2M} \quad (C.28)$$

$$\epsilon_{2q,2M} = \psi_{2q,2M} - c_{0M}\chi_{2q,3M} \quad (C.29)$$

$$\epsilon_{2q,3M} = -c_{0M}\chi_{2q,1M} \quad (C.30)$$

Die Felder der dimensionslosen Temperaturschwankungen im Frequenzbereich sind durch die Gln. C.31 und C.32 gegeben:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}'_{1M}(\xi_M, \eta_M, s) &= \frac{b_{0M}}{a_{0M}} (-1 + e^{a_{0M}\xi_M}) \bar{\theta}'_{2M}(\eta_M, s) + \\ &\quad \frac{e^{-k_{0,2qM}\eta_M}}{a_{0M} + NTU_{1M}} (e^{-NTU_{1M}\xi_M} - e^{a_{0M}\xi_M}) \psi_{2q,1M} + e^{a_{0M}\xi_M} \bar{\theta}'_{1,ein M}(s) \end{aligned} \quad (C.31)$$

$$\bar{\theta}'_{2M}(\eta_M, s) = \frac{\epsilon_{2q,3M}}{\epsilon_{2q,1M}} (1 - e^{\epsilon_{2q,1M}\eta_M}) \bar{\theta}'_{1,ein M}(s) + \quad (C.32)$$

$$\frac{\epsilon_{2q,2M}}{\epsilon_{2q,1M} + k_{0,2qM}} \left( e^{-k_{0,2qM}\eta_M} - e^{\epsilon_{2q,1M}\eta_M} \right) + e^{\epsilon_{2q,1M}\eta_M} \tilde{\theta}'_{2, \text{ein } M}(s).$$

Die dimensionslosen Schwankungen der Austrittstemperaturen sind durch die Gln. C.33 und C.34 gegeben:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'_{1, \text{aus } M}(s) &= \int_0^1 \tilde{\theta}'_{1M}(\xi_M = 1, \eta_M, s) d\eta_M \\ &= \left[ \frac{b_{0M}}{a_{0M}} (-1 + e^{a_{0M}}) \frac{\epsilon_{2q,3M}}{\epsilon_{2q,1M}} \frac{1 + \epsilon_{2q,1M} - e^{\epsilon_{2q,1M}}}{\epsilon_{2q,1M}} + e^{a_{0M}} \right] \tilde{\theta}'_{1, \text{ein } M}(s) + \\ &\quad \left[ \frac{b_{0M}}{a_{0M}} (-1 + e^{a_{0M}}) \frac{\epsilon_{2q,1M} - 1}{\epsilon_{2q,1M}} \right] \tilde{\theta}'_{2, \text{ein } M}(s) + \\ &\quad \frac{b_{0M}}{a_{0M}} (-1 + e^{a_{0M}}) \frac{\epsilon_{2q,2M}}{\epsilon_{2q,1M} + k_{0,2qM}} \left( \frac{1 - e^{-k_{0,2qM}}}{k_{0,2qM}} - \frac{e^{\epsilon_{2q,1M}} - 1}{\epsilon_{2q,1M}} \right) + \\ &\quad \frac{1 - e^{-k_{0,2qM}}}{k_{0,2qM}} \frac{\psi_{2q,1M}}{a_{0M} + NTU_{1M}} (e^{-NTU_{1M}} - e^{a_{0M}}) \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'_{2, \text{aus } M}(s) &= \tilde{\theta}'_{2M}(\eta_M = 1, s) \\ &= \underbrace{\frac{\epsilon_{2q,3M}}{\epsilon_{2q,1M}} (1 - e^{\epsilon_{2q,1M}}) \tilde{\theta}'_{1, \text{ein } M}(s) + \frac{\epsilon_{2q,2M}}{\epsilon_{2q,1M} + k_{0,2qM}} (e^{-k_{0,2qM}} - e^{\epsilon_{2q,1M}})}_{\Gamma_{2q,1M}} + \\ &\quad \underbrace{e^{\epsilon_{2q,1M}}}_{\Gamma_{2q,2M}} \tilde{\theta}'_{2, \text{ein } M}(s) \\ &= \Gamma_{2q,1M} + \Gamma_{2q,2M} \tilde{\theta}'_{2, \text{ein } M}(s). \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

## C.2 Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom quervermischt, Umlaufstrom unvermischt)

Die exakten Energiegleichungen B.9 bis B.11 lauten im Frequenzbereich für den Fluidstrom 1:

$$\begin{aligned} -(1 + \sigma_{1M}) \frac{\partial \tilde{\theta}'_{1M}}{\partial \xi_M} - (\bar{N}_{1M} + N'_{1M}) (\tilde{\theta}'_{1M} - \int_0^1 \tilde{\theta}'_{WM} d\eta_M) \\ - \frac{(N'_{1M} - \sigma_{1M} \bar{N}_{1M}) (\tilde{\theta}'_{1M} - \int_0^1 \tilde{\theta}'_{WM} d\eta_M)}{s} = \kappa_{1M} s \tilde{\theta}'_{1M}, \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

für den Fluidstrom 2:

$$\begin{aligned} -(1 + \sigma_2) \frac{\partial \tilde{\theta}'_{2M}}{\partial \eta_M} - (\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) (\tilde{\theta}'_{2M} - \tilde{\theta}'_{WM}) \\ - \frac{(N'_{2M} - \sigma_{2M} \bar{N}_{2M}) (\tilde{\theta}'_{2M} - \tilde{\theta}'_{WM})}{s} = \kappa_{2M} s \tilde{\theta}'_{2M} \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

und für die wärmeübertragende Wand:

$$\frac{N'_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM})}{s} + (\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\bar{\theta}'_{1M} - \bar{\theta}'_{WM}) + \frac{N'_{2M}R_{2,1M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM})}{s} + (\bar{N}_{2M} + N'_{2M})R_{2,1M}(\bar{\theta}'_{2M} - \bar{\theta}'_{WM}) = \omega_M s \bar{\theta}'_{WM} \quad (C.37)$$

Die linearisierten Energiegleichungen B.12 bis B.14 lauten im Frequenzbereich für den Fluidstrom 1:

$$-\frac{\partial \bar{\theta}'_{1M}}{\partial \xi_M} - \bar{N}_{1M}(\bar{\theta}'_{1M} - \int_0^1 \bar{\theta}'_{WM} d\eta_M) - (m_{1M} - 1)\bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \int_0^1 \bar{\theta}_{WM} d\eta_M) \bar{\sigma}_{1M} = \kappa_{1M} s \bar{\theta}'_{1M}, \quad (C.38)$$

für den Fluidstrom 2:

$$-\frac{\partial \bar{\theta}'_{2M}}{\partial \eta_M} - \bar{N}_{2M}(\bar{\theta}'_{2M} - \bar{\theta}'_{WM}) - (m_{2M} - 1)\bar{N}_{2M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) \bar{\sigma}_2 = \kappa_{2M} s \bar{\theta}'_{2M} \quad (C.39)$$

und für die wärmeübertragende Wand:

$$m_{1M}\bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM})\bar{\sigma}_{1M} + \bar{N}_{1M}(\bar{\theta}'_{1M} - \bar{\theta}'_{WM}) + m_{2M}\bar{N}_{2M}R_{2,1M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM})\bar{\sigma}_2 + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}(\bar{\theta}'_{2M} - \bar{\theta}'_{WM}) = \omega_M s \bar{\theta}'_{WM}. \quad (C.40)$$

Für die Berechnung in diesem Abschnitt seien die dimensionslosen Schwankungen der Eintrittstemperaturen beider Fluidströme als Randbedingungen vorgegeben:

$$\theta'_{1M}(\xi_M = 0, \tau) = \theta'_{1, \text{ein}M}(\tau) \quad (C.41)$$

$$\theta'_{2M}(\xi_M, \eta_M = 0, \tau) = \theta'_{2, \text{ein}M}(\tau). \quad (C.42)$$

Die Gln. C.41 und C.42 lauten im Frequenzbereich:

$$\bar{\theta}'_{1M}(\xi_M = 0, s) = \bar{\theta}'_{1, \text{ein}M}(s) \quad (C.43)$$

$$\bar{\theta}'_{2M}(\xi_M, \eta_M = 0, s) = \bar{\theta}'_{2, \text{ein}M}(s). \quad (C.44)$$

Die Randbedingungen für die Hauptströme, Gl. C.41, sind tatsächliche Randbedingungen des zusammengeschalteten Systems. Sie sind identisch mit den Gln. 4.112 und 4.113. Im Gegensatz dazu sind die Randbedingungen für den Umlaufstrom, Gl. C.42, Hilfsgleichungen. Die dimensionslosen Schwankungen der Eintrittstemperaturen des Umlaufstroms sind zunächst unbekannte Zeitfunktionen, die in Anh. C.5 explizit für das zusammengeschaltete System bestimmt werden.

Aus den transformierten Energiegleichungen für die Fluidströme, C.35 und C.36 bzw. C.38 und C.39, wird die dimensionslose Wandtemperatur und deren Schwankung eliminiert und für die exakte und linearisierte Fassung in einer gemeinsamen Form dargestellt:

$$-\frac{\partial \tilde{\theta}'_{1M}}{\partial \xi_M} + a_{0M} \tilde{\theta}'_{1M} + b_{0M} \int_0^1 \tilde{\theta}'_{2M} d\eta_M = \psi_{1q,1M} e^{-k_{0,1qM} \xi_M} \quad (C.45)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\theta}'_{2M}}{\partial \eta_M} + c_{0M} \tilde{\theta}'_{1M} + d_{0M} \tilde{\theta}'_{2M} = \psi_{1q,2M} e^{-k_{0,1qM} \xi_M} e^{-\frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}} \eta_M} \quad (C.46)$$

Wenn das System aus den Gln. C.45 und C.46 die exakte Fassung der Energiegleichungen darstellt, gilt für seine Parameter:

$$\psi_{1q,1M} = \left\{ -\frac{(\bar{N}_{1M} + N'_{1M}) R_{2,1M} (N'_{1M} \bar{N}_{2M} - N'_{2M} \bar{N}_{1M})}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}) [\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M} (\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s]} (1 + \sigma_{1M}) + \frac{(N'_{1M} - \sigma_{1M} \bar{N}_{1M}) \bar{N}_{2M} R_{2,1M}}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}) (1 + \sigma_{1M})} \right\} \frac{1 - e^{-\frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}}}}{\frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}}} (\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}) \quad (C.47)$$

$$\psi_{1q,2M} = \left\{ -\frac{(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) R_{2,1M} (N'_{1M} \bar{N}_{2M} - N'_{2M} \bar{N}_{1M})}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}) [\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M} (\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s]} (1 + \sigma_2) - \frac{(N'_{2M} - \sigma_2 \bar{N}_{2M}) \bar{N}_{1M}}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}) (1 + \sigma_2)} \right\} (\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}) \quad (C.48)$$

Wenn das System aus den Gln. C.45 und C.46 die linearisierte Fassung der Energiegleichungen darstellt, gilt für seine Parameter:

$$\psi_{1q,1M} = \left\{ -\frac{\bar{N}_{1M}^2 \bar{N}_{2M} R_{2,1M} (m_{1M} \tilde{\sigma}_{1M} - m_{2M} \tilde{\sigma}_{2M})}{(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}) (\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M} + \omega_M s)} + \frac{(m_{1M} - 1) \bar{N}_{1M} \bar{N}_{2M} R_{2,1M} \tilde{\sigma}_{1M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}} \right\} \frac{1 - e^{-\frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}}}}{\frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}}} (\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}) \quad (C.49)$$

$$\psi_{1q,2M} = \left\{ -\frac{\bar{N}_{1M} \bar{N}_{2M}^2 R_{2,1M} (m_{1M} \tilde{\sigma}_{1M} - m_{2M} \tilde{\sigma}_{2M})}{(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}) (\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M} + \omega_M s)} - \frac{(m_{2M} - 1) \bar{N}_{1M} \bar{N}_{2M} \tilde{\sigma}_{2M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}} \right\} (\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}) \quad (C.50)$$

Die Parameter  $a_{0M}$ ,  $b_{0M}$ ,  $c_{0M}$  und  $d_{0M}$  sind mit den Gleichungen aus Anh. C.1 zu berechnen.

Für die Darstellung der Lösung werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\chi_{1q,1M} = \frac{e^{d_{0M}} - 1}{d_{0M}} \quad (C.51)$$

$$\chi_{1q,2M} = -\frac{c_{0M}}{d_{0M}} \left( \frac{d_{0M} - e^{d_{0M}} + 1}{d_{0M}} \right) \quad (C.52)$$

$$\chi_{1q,3M} = \frac{\psi_{1q,2M}}{d_{0M} + \frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}}} \left( \frac{1 - e^{-\frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}}}}{\frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}}} - \frac{e^{d_{0M}} - 1}{d_{0M}} \right) \quad (C.53)$$

$$\epsilon_{1q,1M} = a_{0M} + b_{0M} \chi_{1q,2M} \quad (C.54)$$

$$\epsilon_{1q,2M} = \psi_{1q,2M} - b_{0M} \chi_{1q,3M} \quad (C.55)$$

$$\epsilon_{1q,3M} = -b_{0M} \chi_{1q,1M}. \quad (C.56)$$

Die Felder der dimensionslosen Temperaturschwankungen sind durch die Gln. C.57 und C.58 gegeben:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'_{1M}(\xi_M, s) &= \frac{\epsilon_{1q,3M}}{\epsilon_{1q,1M}} (1 - e^{\epsilon_{1q,1M} \xi_M}) \tilde{\theta}'_{2, \text{ein } M}(s) + \\ &\quad \frac{\epsilon_{1q,2M}}{\epsilon_{1q,1M} + k_{0,1qM}} (e^{-k_{0,1qM} \xi_M} - e^{\epsilon_{1q,1M} \xi_M}) + e^{\epsilon_{1q,1M} \xi_M} \tilde{\theta}'_{1, \text{ein } M}(s) \end{aligned} \quad (C.57)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'_{2M}(\xi_M, \eta_M, s) &= \frac{c_{0M}}{d_{0M}} (-1 + e^{d_{0M} \eta_M}) \tilde{\theta}'_1(\xi_M, s) + \\ &\quad \frac{e^{-k_{0,1qM} \xi_M}}{d_{0M} + \frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}}} \left( e^{-\frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}} \eta_M} - e^{d_{0M} \eta_M} \right) \psi_{1q,2M} + e^{d_{0M} \eta_M} \tilde{\theta}'_{2, \text{ein } M}(s). \end{aligned} \quad (C.58)$$

Die dimensionslosen Schwankungen der Austrittstemperaturen sind durch die Gln. C.59 und C.60 gegeben:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'_{1, \text{aus } M}(s) &= \tilde{\theta}'_{1M}(\xi_M = 1, s) \\ &= \frac{\epsilon_{1q,3M}}{\epsilon_{1q,1M}} (1 - e^{\epsilon_{1q,1M}}) \tilde{\theta}'_{2, \text{ein } M}(s) + \frac{\epsilon_{1q,2M}}{\epsilon_{1q,1M} + k_{0,1qM}} (e^{-k_{0,1qM}} - e^{\epsilon_{1q,1M}}) + \\ &\quad e^{\epsilon_{1q,1M}} \tilde{\theta}'_{1, \text{ein } M}(s) \end{aligned} \quad (C.59)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'_{2, \text{aus } M}(s) &= \int_0^1 \tilde{\theta}'_{2M}(\xi_M, \eta_M = 1, s) d\xi_M \\ &= \left[ \frac{c_{0M}}{d_{0M}} (-1 + e^{d_{0M}}) \frac{\epsilon_{1q,1M} - 1}{\epsilon_{1q,1M}} \right] \tilde{\theta}'_{1, \text{ein } M}(s) + \\ &\quad \frac{c_{0M}}{d_{0M}} (-1 + e^{d_{0M}}) \frac{\epsilon_{1q,2M}}{\epsilon_{1q,1M} + k_{0,1qM}} \left( \frac{1 - e^{-k_{0,1qM}}}{k_{0,1qM}} - \frac{e^{\epsilon_{1q,1M}} - 1}{\epsilon_{1q,1M}} \right) + \\ &\quad \underbrace{\frac{1 - e^{-k_{0,1qM}}}{k_{0,1qM}} \frac{\psi_{1q,2M}}{d_{0M} + \frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}}} \left( e^{-\frac{NTU_{1M}}{R_{2,1M}}} - e^{d_{0M}} \right)}_{\Gamma_{1q,1M}} + \\ &\quad \underbrace{\left[ \frac{c_{0M}}{d_{0M}} (-1 + e^{d_{0M}}) \frac{\epsilon_{1q,3M}}{\epsilon_{1q,1M}} \frac{1 + \epsilon_{1q,1M} - e^{\epsilon_{1q,1M}}}{\epsilon_{1q,1M}} + e^{d_{0M}} \right]}_{\Gamma_{1q,2M}} \tilde{\theta}'_{2, \text{ein } M}(s) \end{aligned} \quad (C.60)$$

$$= \Gamma_{1q,1M} + \Gamma_{1q,2M} \tilde{\theta}'_{2, \text{ein } M}(s). \quad (\text{C.61})$$

### C.3 Gegenstrom

Die exakten Energiegleichungen B.15 bis B.17 lauten im Frequenzbereich für den Fluidstrom 1:

$$\begin{aligned} -(1 + \sigma_{1M}) \frac{\partial \tilde{\theta}'_{1M}}{\partial \xi_M} - (\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\tilde{\theta}'_{1M} - \tilde{\theta}'_{WM}) \\ - \frac{(N'_{1M} - \sigma_{1M} \bar{N}_{1M})(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM})}{s} = \kappa_{1M} s \tilde{\theta}'_{1M}, \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

für den Fluidstrom 2:

$$\begin{aligned} (1 + \sigma_2) \frac{\partial \tilde{\theta}'_{2M}}{\partial \xi_M} - (\bar{N}_{2M} + N'_{2M})(\tilde{\theta}'_{2M} - \tilde{\theta}'_{WM}) \\ - \frac{(N'_{2M} - \sigma_{2M} \bar{N}_{2M})(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM})}{s} = \kappa_{2M} s \tilde{\theta}'_{2M} \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

und für die wärmeübertragende Wand:

$$\begin{aligned} \frac{N'_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM})}{s} + (\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\tilde{\theta}'_{1M} - \tilde{\theta}'_{WM}) + \\ \frac{N'_{2M} R_{2,1M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM})}{s} + (\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) R_{2,1M}(\tilde{\theta}'_{2M} - \tilde{\theta}'_{WM}) = \omega_M s \tilde{\theta}'_{WM}. \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

Die linearisierten Energiegleichungen B.18 bis B.20 lauten im Frequenzbereich für den Fluidstrom 1:

$$-\frac{\partial \tilde{\theta}'_{1M}}{\partial \xi_M} - \bar{N}_{1M}(\tilde{\theta}'_{1M} - \tilde{\theta}'_{WM}) - (m_{1M} - 1) \bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM}) \tilde{\sigma}_{1M} = \kappa_{1M} s \tilde{\theta}'_{1M}, \quad (\text{C.65})$$

für den Fluidstrom 2:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}'_{2M}}{\partial \xi_M} - \bar{N}_{2M}(\tilde{\theta}'_{2M} - \tilde{\theta}'_{WM}) - (m_{2M} - 1) \bar{N}_{2M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) \tilde{\sigma}_2 = \kappa_{2M} s \tilde{\theta}'_{2M} \quad (\text{C.66})$$

und für die wärmeübertragende Wand:

$$\begin{aligned} m_{1M} \bar{N}_{1M}(\bar{\theta}_{1M} - \bar{\theta}_{WM}) \tilde{\sigma}_{1M} + \bar{N}_{1M}(\tilde{\theta}'_{1M} - \tilde{\theta}'_{WM}) + \\ m_{2M} \bar{N}_{2M} R_{2,1M}(\bar{\theta}_{2M} - \bar{\theta}_{WM}) \tilde{\sigma}_2 + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}(\tilde{\theta}'_{2M} - \tilde{\theta}'_{WM}) = \omega_M s \tilde{\theta}'_{WM}. \end{aligned} \quad (\text{C.67})$$

Mit Hilfe der Energiegleichungen für die wärmeübertragende Wand werden aus den Energiegleichungen für die Fluidströme die Wandtemperaturen und deren Schwankungen eliminiert. Die resultierenden exakten und linearisierten Energiegleichungen für die

Fluidströme werden dann in einer gemeinsamen Form dargestellt, Gl. C.68. Die exakte und die linearisierte Version unterscheiden sich durch die Koeffizientenmatrix  $\underline{A}_M$  und den Vektor  $\vec{F}_M(\xi)$ .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\theta}'_{1M}}{\partial \xi_M} \\ \frac{\partial \tilde{\theta}'_{2M}}{\partial \xi_M} \end{bmatrix}}_{\vec{\theta}'_M(\xi_M)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11M} & a_{12M} \\ a_{21M} & a_{22M} \end{bmatrix}}_{\underline{A}_M} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\theta}'_{1M} \\ \tilde{\theta}'_{2M} \end{bmatrix}}_{\vec{\theta}'_M(\xi_M)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{g,1M} e^{h_{0M} \xi_M} \\ \psi_{g,2M} e^{h_{0M} \xi_M} \end{bmatrix}}_{\vec{F}_M(\xi_M)} \quad (C.68)$$

Das System inhomogener linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, Gl. C.68, wird nach folgender Rechenvorschrift gelöst [45]:

$$\vec{\theta}'_M(\xi_M) = e^{\underline{A}_M \xi_M} \vec{c}_M + e^{\underline{A}_M \xi_M} \int e^{-\underline{A}_M \xi_M} \vec{f}_M(\xi_M) d\xi_M. \quad (C.69)$$

Für die Darstellung der Lösung werden folgende Abkürzungen aus Abschnitt A.3 benötigt:

$$\begin{aligned} NTU_{1M} &= \frac{\bar{N}_{1M} \bar{N}_{2M} R_{2,1M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} R_{2,1M}} \\ h_{0M} &= (R_{1,2M} - 1) NTU_{1M}. \end{aligned}$$

Die Elemente der Koeffizientenmatrix für die exakten Energiegleichungen lauten:

$$a_{11M} = \frac{-(\bar{N}_{1M} + N'_{1M}) [R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s]}{[\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s] (1 + \sigma_{1M})} - \frac{\kappa_{1M} s}{1 + \sigma_{1M}} \quad (C.70)$$

$$a_{12M} = \frac{(\bar{N}_{1M} + N'_{1M}) R_{2,1M} (\bar{N}_{2M} + N'_{2M})}{[\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s] (1 + \sigma_{1M})} \quad (C.71)$$

$$a_{21M} = -\frac{(\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(\bar{N}_{2M} + N'_{2M})}{[\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s] (1 + \sigma_{2M})} \quad (C.72)$$

$$a_{22M} = \frac{(\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + \omega_M s)(\bar{N}_{2M} + N'_{2M})}{[\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s] (1 + \sigma_{2M})} + \frac{\kappa_{2M} s}{1 + \sigma_{2M}}. \quad (C.73)$$

Für den Vektor  $\vec{F}_M$  muß unterschieden werden, ob das Wärmekapazitätsstromverhältnis von Hauptstrom zu Umlaufstrom gleich oder ungleich 1 ist. Ist es ungleich 1, so gilt

für die exakten Energiegleichungen:

$$\psi_{g,1M} = \left[ \frac{(\bar{N}_{1M} + N'_{1M})R_{2,1M}(N'_{1M}\bar{N}_{2M} - N'_{2M}\bar{N}_{1M})}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M})[\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s]}(1 + \sigma_{1M}) - \frac{(N'_{1M} - \sigma_{1M}\bar{N}_{1M})\bar{N}_{2M}R_{2,1M}}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M})(1 + \sigma_{1M})} \right] \frac{1 - R_{1,2M}}{1 - R_{1,2M}e^{h_{0M}}}(\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}) \quad (C.74)$$

$$\psi_{g,2M} = \left[ -\frac{(\bar{N}_{2M} + N'_{2M})R_{2,1M}(N'_{1M}\bar{N}_{2M} - N'_{2M}\bar{N}_{1M})}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M})[\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + R_{2,1M}(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s]}(1 + \sigma_{2M}) - \frac{(N'_{2M} - \sigma_{2M}\bar{N}_{2M})\bar{N}_{1M}}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M})(1 + \sigma_{2M})} \right] \frac{1 - R_{1,2M}}{1 - R_{1,2M}e^{h_{0M}}}(\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}). \quad (C.75)$$

Ist  $R_{1,2M} = 1$ , so gilt für die exakten Energiegleichungen:

$$\psi_{g,1M} = \left[ \frac{(\bar{N}_{1M} + N'_{1M})(N'_{1M}\bar{N}_{2M} - N'_{2M}\bar{N}_{1M})}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M})[\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + \bar{N}_{2M} + N'_{2M} + \omega_M s]}(1 + \sigma_{1M}) - \frac{(N'_{1M} - \sigma_{1M}\bar{N}_{1M})\bar{N}_{2M}}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M})(1 + \sigma_{1M})} \right] \frac{1}{1 + NTU_{1M}}(\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}) \quad (C.76)$$

$$\psi_{g,2M} = \left[ -\frac{(\bar{N}_{2M} + N'_{2M})(N'_{1M}\bar{N}_{2M} - N'_{2M}\bar{N}_{1M})}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M})[\bar{N}_{1M} + N'_{1M} + \bar{N}_{2M} + N'_{2M} + \omega_M s]}(1 + \sigma_{2M}) - \frac{(N'_{2M} - \sigma_{2M}\bar{N}_{2M})\bar{N}_{1M}}{s(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M})(1 + \sigma_{2M})} \right] \frac{1}{1 + NTU_{1M}}(\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}). \quad (C.77)$$

Die Elemente der Koeffizientenmatrix für die linearisierten Energiegleichungen lauten:

$$a_{11M} = -\frac{\bar{N}_{1M}(\bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s)}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s} - \kappa_{1M}s \quad (C.78)$$

$$a_{12M} = \frac{\bar{N}_{1M}\bar{N}_{2M}R_{2,1M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s} \quad (C.79)$$

$$a_{21M} = -\frac{\bar{N}_{1M}\bar{N}_{2M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s} \quad (C.80)$$

$$a_{22M} = \frac{(\bar{N}_{1M} + \omega_M s)\bar{N}_{2M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s} + \kappa_{2M}s. \quad (C.81)$$

Ist  $R_{1,2M} \neq 1$ , so gilt für die linearisierten Energiegleichungen:

$$\psi_{g,1M} = \left[ \frac{\bar{N}_{1M}^2\bar{N}_{2M}R_{2,1M}(m_{1M}\tilde{\sigma}_{1M} - m_{2M}\tilde{\sigma}_{2M})}{(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M})(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s)} - \frac{(m_{1M} - 1)\bar{N}_{1M}\bar{N}_{2M}R_{2,1M}\tilde{\sigma}_{1M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}} \right] \frac{1 - R_{1,2M}}{1 - R_{1,2M}e^{h_{0M}}}(\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}) \quad (C.82)$$

$$\psi_{g,2M} = \left[ \frac{\bar{N}_{1M}\bar{N}_{2M}^2R_{2,1M}(m_{1M}\tilde{\sigma}_{1M} - m_{2M}\tilde{\sigma}_{2M})}{(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M})(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M} + \omega_M s)} - \frac{(m_{2M} - 1)\bar{N}_{1M}\bar{N}_{2M}\tilde{\sigma}_{2M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}R_{2,1M}} \right] \frac{1 - R_{1,2M}}{1 - R_{1,2M}e^{h_{0M}}}(\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}). \quad (C.83)$$



Ist  $R_{1,2M} = 1$ , so gilt für die linearisierten Energiegleichungen:

$$\psi_{g,1M} = \left[ \frac{\bar{N}_{1M}^2 \bar{N}_{2M} (m_{1M} \bar{\sigma}_{1M} - m_{2M} \bar{\sigma}_{2M})}{(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M})(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} + \omega_M s)} - \frac{(m_{1M} - 1) \bar{N}_{1M} \bar{N}_{2M} \bar{\sigma}_{1M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}} \right] \frac{1}{1 + NTU_{1M}} (\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}) \quad (C.84)$$

$$\psi_{g,2M} = \left[ \frac{\bar{N}_{1M} \bar{N}_{2M}^2 (m_{1M} \bar{\sigma}_{1M} - m_{2M} \bar{\sigma}_{2M})}{(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M})(\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M} + \omega_M s)} - \frac{(m_{2M} - 1) \bar{N}_{1M} \bar{N}_{2M} \bar{\sigma}_{2M}}{\bar{N}_{1M} + \bar{N}_{2M}} \right] \frac{1}{1 + NTU_{1M}} (\bar{\theta}_{1,ein M} - \bar{\theta}_{2,ein M}). \quad (C.85)$$

Durch die Anwendung der Rechenvorschrift C.69 fließen die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix

$$p_{01M} = \frac{1}{2} \left( a_{11M} + a_{22M} + \sqrt{(a_{11M} - a_{22M})^2 + 4a_{12M}a_{21M}} \right) \quad \text{und} \quad (C.86)$$

$$p_{02M} = \frac{1}{2} \left( a_{11M} + a_{22M} - \sqrt{(a_{11M} - a_{22M})^2 + 4a_{12M}a_{21M}} \right) \quad (C.87)$$

in die Lösung ein. Die Abhängigkeit der Lösung von der Ortskoordinate  $\xi_M$  kommt in folgenden Hilfsfunktionen zum Ausdruck:

$$\gamma_{0M}(\xi_M) = \frac{p_{01M} e^{p_{02M} \xi_M} - p_{02M} e^{p_{01M} \xi_M}}{p_{01M} - p_{02M}} \quad (C.88)$$

$$\gamma_{1M}(\xi_M) = \frac{e^{p_{01M} \xi_M} - e^{p_{02M} \xi_M}}{p_{01M} - p_{02M}} \quad (C.89)$$

$$\beta_{1M}(\xi_M) = \frac{e^{(h_{0M} - p_{01M}) \xi_M}}{(p_{01M} - h_{0M})(p_{01M} - p_{02M})} \quad (C.90)$$

$$\beta_{2M}(\xi_M) = \frac{e^{(h_{0M} - p_{02M}) \xi_M}}{(p_{02M} - h_{0M})(p_{01M} - p_{02M})}. \quad (C.91)$$

Das Feld der dimensionslosen Temperaturschwankungen des Fluidstroms 1 ist im Frequenzbereich durch die folgende Gleichung gegeben, in der noch die unbestimmten Konstanten  $c_{1M}$  und  $c_{2M}$  enthalten sind:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}'_{1M}(\xi_M, s) = & (a_{11M} \gamma_{1M} + \gamma_{0M}) c_{1M} + a_{12M} \gamma_{1M} c_{2M} + (a_{11M} \gamma_{1M} + \gamma_{0M}) \\ & [(-a_{11M} \psi_{g,1M} - a_{12M} \psi_{g,2M} + p_{02M} \psi_{g,1M}) \beta_{1M} + \\ & (a_{11M} + a_{12M} \psi_{g,2M} - p_{01M} \psi_{g,1M}) \beta_{2M}] + a_{12M} \gamma_{1M} \\ & [(-a_{21M} \psi_{g,1M} - a_{22M} \psi_{g,2M} + p_{02M} \psi_{g,2M}) \beta_{1M} + \\ & (a_{21M} \psi_{g,1M} + a_{22M} \psi_{g,2M} - p_{01M} \psi_{g,2M}) \beta_{2M}]. \end{aligned} \quad (C.92)$$

Am Eintritt des Fluidstroms 1 in den Wärmeübertrager gilt:

$$\bar{\theta}'_{1M}(0, s) = c_{1M} +$$

$$\begin{aligned} & [(-a_{11M}\psi_{g,1M} - a_{12M}\psi_{g,2M} + p_{02M}\psi_{g,1M})\beta_{1M}(0) + \\ & (a_{11M} + a_{12M}\psi_{g,2M} - p_{01M}\psi_{g,1M})\beta_{2M}(0)]. \end{aligned} \quad (C.93)$$

Bei  $\xi_M = 0$  wird die dimensionslose Schwankung der Eintrittstemperatur des Fluidstroms 1 vorgegeben. Diese Randbedingung lautet im Zeitbereich

$$\theta'_{1M}(0, \tau) = \theta'_{1, \text{ein } M}(\tau) \quad (C.94)$$

und im Frequenzbereich

$$\tilde{\theta}'_{1M}(0, s) = \tilde{\theta}'_{1, \text{ein } M}(s). \quad (C.95)$$

Gleichung C.95, in Gl. C.93 eingesetzt, ergibt die unbestimmte Konstante  $c_{1M}$  zu

$$c_{1M} = \tilde{\theta}'_{1, \text{ein } M} - \frac{a_{11M}\psi_{g,1M} + a_{12M}\psi_{g,2M} + h_{0M}\psi_{g,1M} - p_{01M}\psi_{g,1M} - p_{02M}\psi_{g,1M}}{(p_{01M} - h_{0M})(p_{02M} - h_{0M})}. \quad (C.96)$$

Die dimensionslose Schwankung der Austrittstemperatur des Fluidstroms 1 beträgt

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'_{1M}(1, s) = & (a_{11M}\gamma_{1M}(1) + \gamma_{0M}(1))c_{1M} + a_{12M}\gamma_{1M}(1)c_{2M} + (a_{11M}\gamma_{1M}(1) + \gamma_{0M}(1)) \\ & [(-a_{11M}\psi_{g,1M} - a_{12M}\psi_{g,2M} + p_{02M}\psi_{g,1M})\beta_{1M}(1) + \\ & (a_{11M} + a_{12M}\psi_{g,2M} - p_{01M}\psi_{g,1M})\beta_{2M}(1)] + a_{12M}\gamma_{1M}(1) \\ & [(-a_{21M}\psi_{g,1M} - a_{22M}\psi_{g,2M} + p_{02M}\psi_{g,2M})\beta_{1M}(1) + \\ & (a_{21M}\psi_{g,1M} + a_{22M}\psi_{g,2M} - p_{01M}\psi_{g,2M})\beta_{2M}(1)]. \end{aligned} \quad (C.97)$$

Das Feld der dimensionslosen Temperaturschwankungen des Fluidstroms 2 ist durch

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'_{2M}(\xi_M, s) = & a_{21M}\gamma_{1M}c_{1M} + (a_{22M}\gamma_{1M} + \gamma_{0M})c_{2M} + (a_{22M}\gamma_{1M} + \gamma_{0M}) \\ & [(-a_{21M}\psi_{g,1M} - a_{22M}\psi_{g,2M} + p_{02M}\psi_{g,2M})\beta_{1M} + \\ & (a_{21M}\psi_{g,1M} + a_{22M}\psi_{g,2M} - p_{01M}\psi_{g,2M})\beta_{2M}] + a_{21M}\gamma_{1M} \\ & [(-a_{11M}\psi_{g,1M} - a_{12M}\psi_{g,2M} + p_{02M}\psi_{g,1M})\beta_{1M} + \\ & (a_{11M}\psi_{g,1M} + a_{12M}\psi_{g,2M} - p_{01M}\psi_{g,1M})\beta_{2M}] \end{aligned} \quad (C.98)$$

gegeben. Am Fluideintritt gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'_{2M}(1, s) = & \overbrace{(a_{22M}\gamma_{1M}(1) + \gamma_{0M}(1))}^{\Gamma_{g,2M}} c_{2M} + \\ & a_{21M}\gamma_{1M}(1)c_{1M} + (a_{22M}\gamma_{1M}(1) + \gamma_{0M}(1)) \\ & [(-a_{21M}\psi_{g,1M} - a_{22M}\psi_{g,2M} + p_{02M}\psi_{g,2M})\beta_{1M}(1) + \\ & (a_{21M}\psi_{g,1M} + a_{22M}\psi_{g,2M} - p_{01M}\psi_{g,2M})\beta_{2M}(1)] + a_{21M}\gamma_{1M}(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(-a_{11M}\psi_{g,1M} - a_{12M}\psi_{g,2M} + p_{02M}\psi_{g,1M})\beta_{1M}(1) + \\ & \underbrace{(a_{11M}\psi_{g,1M} + a_{12M}\psi_{g,2M} - p_{01M}\psi_{g,1M})\beta_{2M}(1)}_{\Gamma_{g,1M}}] \end{aligned} \quad (C.99)$$

$$= \Gamma_{g,1M} + \Gamma_{g,2M}c_{2M}. \quad (C.100)$$

Für die dimensionslose Schwankung der Austrittstemperatur des Fluidstroms 2 gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'_{2M}(0, s) &= c_{2M} + \\ & [(-a_{21M}\psi_{g,1M} - a_{22M}\psi_{g,2M} + p_{02M}\psi_{g,2M})\beta_{1M}(0) + \\ & \underbrace{(a_{21M}\psi_{g,1M} + a_{22M}\psi_{g,2M} - p_{01M}\psi_{g,2M})\beta_{2M}(0)}_{\Gamma_{g,3M}}] \end{aligned} \quad (C.101)$$

$$= c_{2M} + \Gamma_{g,3M}. \quad (C.102)$$

Die Abkürzungen  $\Gamma_{g,1M}$ ,  $\Gamma_{g,2M}$  und  $\Gamma_{g,3M}$  sind eingeführt worden, um die Bestimmung der unbestimmten Konstanten  $c_{2M}$  kompakt darstellen zu können.

Die Gleichungen dieses Abschnitts sollen nicht nur für die Berechnung des zusammengesetzten Systems, sondern auch für die Berechnung eines einzelnen Wärmeübertragers verwendet werden können. In diesem Sonderfall kann bei  $\xi_M = 1$  die dimensionslose Schwankung der Eintrittstemperatur des Fluidstroms 2 als Randbedingung

$$\theta'_{2M}(1, \tau) = \theta'_{2, \text{ein } M}(\tau) \quad (C.103)$$

im Zeitbereich bzw. im Frequenzbereich als

$$\tilde{\theta}'_{2M}(1, s) = \tilde{\theta}'_{2, \text{ein } M}(s) \quad (C.104)$$

vorgegeben werden. Damit beträgt die Konstante

$$c_{2M} = \frac{1}{\Gamma_{g,2M}} (\tilde{\theta}'_{2, \text{ein } M} - \Gamma_{g,1M}). \quad (C.105)$$

## C.4 Verbindungsleitung

Die exakten Energiegleichungen B.21 und B.22 lauten im Frequenzbereich für den Fluidstrom

$$-(1 + \sigma_2) \frac{\partial \tilde{\theta}'_{2M}}{\partial \zeta_M} - (\bar{N}_{2M} + N'_{2M})(\tilde{\theta}'_{2M} - \tilde{\theta}'_{WM}) = \kappa_{2M} s \tilde{\theta}'_{2M} \quad (C.106)$$

und für die Rohrwand

$$(\bar{N}_{2M} + N'_{2M})(\tilde{\theta}'_{2M} - \tilde{\theta}'_{WM}) = \omega_M s \tilde{\theta}'_{WM}. \quad (C.107)$$

Die linearisierten Energiegleichungen B.23 und B.24 lauten im Frequenzbereich für den Fluidstrom

$$-\frac{\partial \tilde{\theta}'_{2M}}{\partial \zeta_M} - \bar{N}_{2M}(\tilde{\theta}'_{2M} - \tilde{\theta}'_{WM}) = \kappa_{2M} s \tilde{\theta}'_{2M} \quad (C.108)$$

und für die Rohrwand

$$\bar{N}_{2M}(\tilde{\theta}'_{2M} - \tilde{\theta}'_{WM}) = \omega_M s \tilde{\theta}'_{WM}. \quad (C.109)$$

Für die Berechnung in diesem Abschnitt sei die dimensionslose Schwankung der Eintrittstemperatur des Fluids vorgegeben:

$$\tilde{\theta}'_{2M}(\zeta_M = 0, \tau) = \tilde{\theta}'_{2, \text{ein}M}(\tau). \quad (C.110)$$

Die Randbedingung C.110 ist eine Hilfsgleichung. Die dimensionslose Schwankung der Eintrittstemperatur des Fluids bleibt unbestimmt, bis die Kopplungsbedingungen verwendet werden. Gleichung C.110 lautet im Frequenzbereich

$$\theta'_{2M}(\zeta = 0, s) = \theta'_{2, \text{ein}M}(s). \quad (C.111)$$

Das Feld der dimensionslosen Temperaturschwankung ist im Fall der exakten Energiegleichungen durch

$$\tilde{\theta}'_{2M}(\zeta_M, s) = \exp \left[ - \frac{\frac{(\bar{N}_{2M} + N'_{2M})\omega_M s}{(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s} + \kappa_{2M} s}{1 + \sigma_2} \zeta_M \right] \tilde{\theta}'_{2, \text{ein}M}(s) \quad (C.112)$$

gegeben und im Fall der linearisierten Energiegleichungen durch

$$\tilde{\theta}'_{2M}(\zeta_M, s) = \exp \left[ - \left( \frac{\bar{N}_{2M}\omega_M s}{\bar{N}_{2M} + \omega_M s} + \kappa_{2M} s \right) \zeta_M \right] \tilde{\theta}'_{2, \text{ein}M}(s). \quad (C.113)$$

Die dimensionslose Schwankung der Austrittstemperatur des Fluids ist im Fall der exakten Energiegleichungen durch

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'_{2, \text{aus}M}(s) &= \tilde{\theta}'_{2M}(\zeta_M = 1, s) \\ &= \underbrace{\exp \left[ - \frac{\frac{(\bar{N}_{2M} + N'_{2M})\omega_M s}{(\bar{N}_{2M} + N'_{2M}) + \omega_M s} + \kappa_{2M} s}{1 + \sigma_2} \right]}_{G_M(s)} \tilde{\theta}'_{2, \text{ein}M}(s) \\ &= G_M \tilde{\theta}'_{2, \text{ein}M}(s) \end{aligned} \quad (C.114)$$

gegeben und im Fall der linearisierten Energiegleichungen durch

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}'_{2,ausM}(s) &= \tilde{\theta}'_{2M}(\zeta_M = 1, s) \\
 &= \underbrace{\exp \left[ - \left( \frac{\bar{N}_{2M}\omega_M s}{\bar{N}_{2M} + \omega_M s} + \kappa_{2M} s \right) \right]}_{G_M(s)} \tilde{\theta}'_{2,einM}(s) \\
 &= G_M \tilde{\theta}'_{2,einM}(s).
 \end{aligned} \tag{C.115}$$

## C.5 Kopplung

### C.5.1 Zwei gekoppelte Kreuzstrom–Wärmeübertrager mit quervermischem Umlaufstrom

Die Kopplungsbedingungen 4.102 bis 4.105 lauten im Frequenzbereich:

$$\tilde{\theta}'_{2I}(\eta_I = 1, s) = \tilde{\theta}'_{2r}(\zeta_r = 0, s) \tag{C.116}$$

$$\tilde{\theta}'_{2r}(\zeta_r = 1, s) = \tilde{\theta}'_{2II}(\eta_{II} = 0, s) \tag{C.117}$$

$$\tilde{\theta}'_{2II}(\eta_{II} = 1, s) = \tilde{\theta}'_{2l}(\zeta_l = 0, s) \tag{C.118}$$

$$\tilde{\theta}'_{2l}(\zeta_l = 1, s) = \tilde{\theta}'_{2I}(\eta_I = 0, s). \tag{C.119}$$

Mit den Gln. C.34, C.114 und C.115 wird aus den Kopplungsbedingungen ein Gleichungssystem zur Bestimmung der beiden unbekannten Eintrittstemperaturen  $\tilde{\theta}'_{2,einI}(s)$  und  $\tilde{\theta}'_{2,einII}(s)$ :

$$\left[ \Gamma_{2q,1I} + \Gamma_{2q,2I} \tilde{\theta}'_{2,einI}(s) \right] G_r = \tilde{\theta}'_{2,einII}(s) \tag{C.120}$$

$$\left[ \Gamma_{2q,1II} + \Gamma_{2q,2II} \tilde{\theta}'_{2,einII}(s) \right] G_l = \tilde{\theta}'_{2,einI}(s). \tag{C.121}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist:

$$\tilde{\theta}'_{2,einI} = \frac{(\Gamma_{2q,1II} + \Gamma_{2q,1I} \Gamma_{2q,2II} G_r) G_l}{1 - \Gamma_{2q,2I} \Gamma_{2q,2II} G_r G_l} \tag{C.122}$$

$$\tilde{\theta}'_{2,einII} = \frac{(\Gamma_{2q,1I} + \Gamma_{2q,1II} \Gamma_{2q,2I} G_l) G_r}{1 - \Gamma_{2q,2I} \Gamma_{2q,2II} G_r G_l}. \tag{C.123}$$

### C.5.2 Zwei gekoppelte Kreuzstrom–Wärmeübertrager mit quervermischten Hauptströmen

Die Kopplungsbedingungen 4.114 bis 4.117 lauten im Frequenzbereich:

$$\int_0^1 \tilde{\theta}'_{2I}(\xi_I, \eta_I = 1, s) d\xi_I = \tilde{\theta}'_{2r}(\zeta_r = 0, s) \quad (C.124)$$

$$\tilde{\theta}'_{2r}(\zeta_r = 1, s) = \tilde{\theta}'_{2II}(\xi_{II}, \eta_{II} = 0, s) \quad (C.125)$$

$$\int_0^1 \tilde{\theta}'_{2II}(\xi_{II}, \eta_{II} = 1, s) d\xi_{II} = \tilde{\theta}'_{2l}(\zeta_l = 0, s) \quad (C.126)$$

$$\tilde{\theta}'_{2l}(\zeta_l = 1, s) = \tilde{\theta}'_{2I}(\xi_I, \eta_I = 0, s). \quad (C.127)$$

Mit den Gln. C.60, C.114 und C.115 wird aus den Kopplungsbedingungen ein Gleichungssystem zur Bestimmung der beiden unbekannten Eintrittstemperaturen  $\tilde{\theta}'_{2,einI}(s)$  und  $\tilde{\theta}'_{2,einII}(s)$ :

$$[\Gamma_{1q,1I} + \Gamma_{1q,2I}\tilde{\theta}'_{2,einI}(s)] G_r = \tilde{\theta}'_{2,einII}(s) \quad (C.128)$$

$$[\Gamma_{1q,1II} + \Gamma_{1q,2II}\tilde{\theta}'_{2,einII}(s)] G_l = \tilde{\theta}'_{2,einI}(s). \quad (C.129)$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist:

$$\tilde{\theta}'_{2,einI} = \frac{(\Gamma_{1q,1II} + \Gamma_{1q,1I}\Gamma_{1q,2II}G_r)G_l}{1 - \Gamma_{1q,2I}\Gamma_{1q,2II}G_rG_l} \quad (C.130)$$

$$\tilde{\theta}'_{2,einII} = \frac{(\Gamma_{1q,1I} + \Gamma_{1q,1II}\Gamma_{1q,2I}G_l)G_r}{1 - \Gamma_{1q,2I}\Gamma_{1q,2II}G_rG_l}. \quad (C.131)$$

### C.5.3 Zwei gekoppelte Gegenstrom–Wärmeübertrager

Die Kopplungsbedingungen 4.126 bis 4.129 lauten im Frequenzbereich:

$$\tilde{\theta}'_{2I}(\xi_I = 0, s) = \tilde{\theta}'_{2l}(\zeta_l = 0, s) \quad (C.132)$$

$$\tilde{\theta}'_{2r}(\zeta_r = 1, s) = \tilde{\theta}'_{2II}(\xi_{II} = 1, s) \quad (C.133)$$

$$\tilde{\theta}'_{2II}(\xi_{II} = 0, s) = \tilde{\theta}'_{2r}(\zeta_r = 0, s) \quad (C.134)$$

$$\tilde{\theta}'_{2l}(\zeta_r = 1, s) = \tilde{\theta}'_{2I}(\xi_I = 1, s) \quad (C.135)$$

Mit den Gln. C.99, C.101, C.114 und C.115 wird aus den Kopplungsbedingungen ein Gleichungssystem zur Bestimmung der beiden Konstanten  $c_{2I}$  und  $c_{2II}$ :

$$(c_{2I} + \Gamma_{g,3I})G_l = \Gamma_{g,1II} + \Gamma_{g,2II}c_{2II} \quad (C.136)$$

$$(c_{2II} + \Gamma_{g,3II})G_r = \Gamma_{g,1I} + \Gamma_{g,2I}c_{2I}. \quad (C.137)$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist:

$$c_{2I} = \frac{\Gamma_{g,3I}G_rG_l + (\Gamma_{g,2II}\Gamma_{g,3II} - \Gamma_{g,1II})G_r - \Gamma_{g,1I}\Gamma_{g,2II}}{\Gamma_{g,2I}\Gamma_{g,2II} - G_rG_l} \quad (C.138)$$

$$c_{2II} = \frac{\Gamma_{g,3II}G_rG_l + (\Gamma_{g,2I}\Gamma_{g,3I} - \Gamma_{g,1I})G_l - \Gamma_{g,1II}\Gamma_{g,2I}}{\Gamma_{g,2I}\Gamma_{g,2II} - G_rG_l}. \quad (C.139)$$

## D Finite-Differenzen-Gleichungen

Um die Gleichungen übersichtlich darzustellen, wird der Laufindex  $M = I, II, r, l$ , der das Untersystem kennzeichnet, fortgelassen. Bis auf  $\sigma_2$  und  $\Delta\tau$  sind alle Symbole mit diesem Laufindex zu verstehen. Die Art des Untersystems geht aus der jeweiligen Abschnittsüberschrift hervor.

### D.1 Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom unvermischt, Umlaufstrom quervermischt)

#### D.1.1 Hauptstrom

Die Werte an den Gitterpunkten  $\theta'_{1i=1,j=1,\dots,m^k+1}^{k=1,\dots,o+1}$  werden durch die Randbedingungen vorgegeben.

Die Werte an den Gitterpunkten  $(i = 2, \dots, n^k + 1, j = 1, \dots, m^k + 1)$  werden mit dem Wendroff-Schema berechnet:

$$\begin{aligned}
 \theta'_{1,i,j}^{k+1} &= f(\sigma_1^{k+\frac{1}{2}}, \bar{N}_1, \kappa_1, N_1^{k+\frac{1}{2}}, \bar{\theta}_{1,i-\frac{1}{2},j}, \bar{\theta}_{W_{i-\frac{1}{2},j}}, \theta'_{1,i-1,j}^{k+1}, \theta'_{1,i-1,j}^k, \theta'_{1,i,j}^k, \\
 &\quad \theta'_{W_{i-1,j}}^{k+1}, \theta'_{W_{i-1,j}}^k, \theta'_{W_{i,j}}^k, \theta'_{W_{i,j}}^{k+1}, \Delta\xi^k, \Delta\tau) \\
 &= \frac{\Xi_{2q,2}}{\Xi_{2q,1} + \Xi_{2q,2} + \Xi_{2q,3}} (\theta'_{W_{i-1,j}}^{k+1} + \theta'_{W_{i-1,j}}^k + \theta'_{W_{i,j}}^k + \theta'_{W_{i,j}}^{k+1}) + \\
 &\quad \frac{\Xi_{2q,1} - \Xi_{2q,2} - \Xi_{2q,3}}{\Xi_{2q,1} + \Xi_{2q,2} + \Xi_{2q,3}} \theta'_{1,i-1,j}^{k+1} + \\
 &\quad \frac{\Xi_{2q,1} - \Xi_{2q,2} + \Xi_{2q,3}}{\Xi_{2q,1} + \Xi_{2q,2} + \Xi_{2q,3}} \theta'_{1,i-1,j}^k + \\
 &\quad \frac{-\Xi_{2q,1} - \Xi_{2q,2} + \Xi_{2q,3}}{\Xi_{2q,1} + \Xi_{2q,2} + \Xi_{2q,3}} \theta'_{1,i,j}^k - \\
 &\quad \frac{\Xi_{2q,4}}{\Xi_{2q,1} + \Xi_{2q,2} + \Xi_{2q,3}} (\bar{\theta}_{1,i-\frac{1}{2},j} - \bar{\theta}_{W_{i-\frac{1}{2},j}}). \tag{D.1}
 \end{aligned}$$

Abkürzungen:

$$\Xi_{2q,1} = 2(1 + \sigma_1^{k+\frac{1}{2}}) \Delta\tau \tag{D.2}$$



$$\Xi_{2q,2} = (\bar{N}_1 + N_1'^{k+\frac{1}{2}}) \Delta \xi^k \Delta \tau \quad (D.3)$$

$$\Xi_{2q,3} = 2\kappa_1 \Delta \xi^k \quad (D.4)$$

$$\Xi_{2q,4} = 4(N_1'^{k+\frac{1}{2}} - \sigma_1^{k+\frac{1}{2}} \bar{N}_1) \Delta \xi^k \Delta \tau \quad (D.5)$$

### D.1.2 Gasförmiger Hauptstrom

Die Werte an den Gitterpunkten  $\theta_{1i=1,j=1,\dots,m^k+1}^{k=1,\dots,o+1}$  werden durch die Randbedingung vorgegeben.

Für  $(i = 2, j = 1, \dots, m^k + 1)$  wird ein Differenzenschema verwendet, bei dem die Ortsableitung der dimensionslosen Temperaturschwankung durch eine einfache Rückwärtsdifferenz approximiert wird:

$$\begin{aligned} \theta_{12,j}'^k &= f(\sigma_1^k, \bar{N}_1, N_1'^k, \bar{\theta}_{12,j}, \bar{\theta}_{W_{2,j}}, \theta_{W_{2,j}}'^k, \Delta \xi) \\ &= \frac{\Xi_{2q,6}}{\Xi_{2q,5} + \Xi_{2q,6}} \theta_{W_{2,j}}'^k + \\ &\quad \frac{\Xi_{2q,5}}{\Xi_{2q,5} + \Xi_{2q,6}} \theta_{11,j}'^k - \\ &\quad \frac{\Xi_{2q,7}}{\Xi_{2q,5} + \Xi_{2q,6}} (\bar{\theta}_{12,j} - \bar{\theta}_{W_{2,j}}) i. \end{aligned} \quad (D.6)$$

Für  $(i = 3, \dots, n^k + 1, j = 1, \dots, m^k + 1)$  wird ein Differenzenschema verwendet, bei dem die Ortsableitung der dimensionslosen Temperaturschwankung durch die Dreipunkte-Formel approximiert wird:

$$\begin{aligned} \theta_{1i,j}'^k &= f(\sigma_1^k, \bar{N}_1, N_1'^k, \bar{\theta}_{1i,j}, \bar{\theta}_{W_{i,j}}, \theta_{1i-2,j}'^k, \theta_{1i-1,j}'^k, \theta_{W_{i,j}}'^k, \Delta \xi) \\ &= \frac{2\Xi_{2q,6}}{3\Xi_{2q,5} + 2\Xi_{2q,6}} \theta_{W_{i,j}}'^k - \\ &\quad \frac{\Xi_{2q,5}}{3\Xi_{2q,5} + 2\Xi_{2q,6}} \theta_{1i-2,j}'^k + \\ &\quad \frac{4\Xi_{2q,5}}{3\Xi_{2q,5} + 2\Xi_{2q,6}} \theta_{1i-1,j}'^k - \\ &\quad \frac{2\Xi_{2q,7}}{3\Xi_{2q,5} + 2\Xi_{2q,6}} (\bar{\theta}_{1i,j} - \bar{\theta}_{W_{i,j}}). \end{aligned} \quad (D.7)$$

Abkürzungen:

$$\Xi_{2q,5} = 1 + \sigma_1^k \quad (D.8)$$

$$\Xi_{2q,6} = (\bar{N}_1 + N_1'^k) \Delta \xi \quad (D.9)$$

$$\Xi_{2q,7} = (N_1'^k - \sigma_1^k \bar{N}_1) \Delta \xi \quad (D.10)$$

### D.1.3 Umlaufstrom

Die Werte an den Gitterpunkten  $j = 2$  werden mit dem FTBS-Schema berechnet:

$$\begin{aligned} \theta'_{2_2^{k+1}} &= -\frac{1+\sigma_2^k}{\kappa_2} \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta^k} (\theta'_{2_2^k} - \theta'_{2_1^k}) - \frac{\Delta\tau}{\kappa_2} (\bar{N}_2 + N_2'^k) \left( \theta'_{2_2^k} - \frac{\sum_{i=1}'' n^{k+1} \theta'_{W_{i,2}}^k}{n^k} \right) \\ &\quad - \frac{\Delta\tau}{\kappa_2} (N_2'^k - \sigma_2^k \bar{N}_2) \left( \bar{\theta}_{2_2} - \frac{\sum_{i=1}'' n^{k+1} \bar{\theta}_{W_{i,2}}}{n^k} \right) + \theta'_{2_2^k}. \end{aligned} \quad (D.11)$$

Die Werte an den Gitterpunkten ( $j = 3, \dots, m+1$ ) werden mit dem Wendroff-Schema berechnet:

$$\begin{aligned} \theta'_{2_j^{k+1}} &= f(\sigma_2^{k+\frac{1}{2}}, \bar{N}_2, \kappa_2, N_2'^{k+\frac{1}{2}}, \bar{\theta}_{2_{j-\frac{1}{2}}}, \bar{\theta}_{W_{i,j-\frac{1}{2}}}, \theta'_{2_{j-1}^{k+1}}, \theta'_{2_{j-1}^k}, \theta'_{2_j^k}, \\ &\quad \theta'_{W_{i,j-1}^{k+1}}, \theta'_{W_{i,j-1}^k}, \theta'_{W_{i,j}^k}, \theta'_{W_{i,j}^{k+1}}, \Delta\eta^k, \Delta\tau) \\ &= \frac{\Xi_{2q,8}}{\Xi_{2q,8} + \Xi_{2q,9} + \Xi_{2q,10}} \frac{\sum_{i=1}'' n^{k+1} (\theta'_{W_{i,j-1}^{k+1}} + \theta'_{W_{i,j-1}^k} + \theta'_{W_{i,j}^k} + \theta'_{W_{i,j}^{k+1}})}{n^k} + \\ &\quad \frac{\Xi_{2q,8} - \Xi_{2q,9} - \Xi_{2q,10}}{\Xi_{2q,8} + \Xi_{2q,9} + \Xi_{2q,10}} \theta'_{2_{j-1}^{k+1}} + \\ &\quad \frac{\Xi_{2q,8} - \Xi_{2q,9} + \Xi_{2q,10}}{\Xi_{2q,8} + \Xi_{2q,9} + \Xi_{2q,10}} \theta'_{2_{j-1}^k} + \\ &\quad \frac{-\Xi_{2q,8} - \Xi_{2q,9} + \Xi_{2q,10}}{\Xi_{2q,8} + \Xi_{2q,9} + \Xi_{2q,10}} \theta'_{2_j^k} - \\ &\quad \frac{\Xi_{2q,11}}{\Xi_{2q,8} + \Xi_{2q,9} + \Xi_{2q,10}} \left( \bar{\theta}_{2_{j-\frac{1}{2}}} - \frac{\sum_{i=1}'' n^{k+1} \bar{\theta}_{W_{i,j-\frac{1}{2}}}}{n^k} \right). \end{aligned} \quad (D.12)$$

Abkürzungen:

$$\Xi_{2q,8} = 2(1 + \sigma_2^{k+\frac{1}{2}}) \Delta\tau \quad (D.13)$$

$$\Xi_{2q,9} = (\bar{N}_2 + N_2'^{k+\frac{1}{2}}) \Delta\eta^k \Delta\tau \quad (D.14)$$

$$\Xi_{2q,10} = 2\kappa_2 \Delta\eta^k \quad (D.15)$$

$$\Xi_{2q,11} = 4(N_2'^{k+\frac{1}{2}} - \sigma_2^{k+\frac{1}{2}} \bar{N}_2) \Delta\eta^k \Delta\tau \quad (D.16)$$

Die Werte an den Gitterpunkten  $j = 1$  ergeben sich aus der Kopplungsbedingung.

### D.1.4 Wandgleichung

Die Werte an den Gitterpunkten ( $i = 1, \dots, n^k + 1, j = 1, \dots, m^k + 1$ ) werden mit dem FTBS-Schema berechnet:

$$\theta'_{W_{i,j}^{k+1}} = \frac{\Delta\tau}{\omega} [N_1'^k (\bar{\theta}_{1,i,j} - \bar{\theta}_{W_{i,j}}) + (\bar{N}_1 + N_1'^k) (\theta'_{1,i,j} - \theta'_{W_{i,j}}) +$$

$$N_2'^k R_{2,1} (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_{W_{i,j}}) + (\bar{N}_2 + N_2'^k) R_{2,1} (\theta_{2,j}'^k - \theta_{W_{i,j}}'^k) + \theta_{W_{i,j}}'^k. \quad (D.17)$$

## D.2 Einseitig quervermischter Kreuzstrom (Hauptstrom quervermischt, Umlaufstrom unvermischt)

### D.2.1 Hauptstrom

Die Werte an den Gitterpunkten  $\theta_{1i=1}^{k=1,\dots,o+1}$  werden durch die Randbedingungen vorgegeben.

Die Werte an den Gitterpunkten  $i = 2, \dots, n^k + 1$  werden mit dem Wendroff-Schema berechnet:

$$\begin{aligned} \theta_{1_i}^{k+1} &= f(\sigma_1^{k+\frac{1}{2}}, \bar{N}_1, \kappa_1, N_1'^{k+\frac{1}{2}}, \bar{\theta}_{1,-\frac{1}{2},j}, \bar{\theta}_{W_{i-\frac{1}{2},j}}, \theta_{1_{i-1}}^{k+1}, \theta_{1_{i-1}}'^k, \theta_{1_i}^k, \\ &\quad \theta_{W_{i-1,j}}^{k+1}, \theta_{W_{i-1,j}}'^k, \theta_{W_{i,j}}^{k+1}, \theta_{W_{i,j}}'^k, \Delta\xi^k, \Delta\tau) \\ &= \frac{\Xi_{1q,2}}{\Xi_{1q,1} + \Xi_{1q,2} + \Xi_{1q,3}} \frac{\sum_{j=1}^{m^k+1} (\theta_{W_{i-1,j}}^{k+1} + \theta_{W_{i-1,j}}'^k + \theta_{W_{i,j}}'^k + \theta_{W_{i,j}}^{k+1})}{m^k} + \\ &\quad \frac{\Xi_{1q,1} - \Xi_{1q,2} - \Xi_{1q,3}}{\Xi_{1q,1} + \Xi_{1q,2} + \Xi_{1q,3}} \theta_{1_{i-1}}^{k+1} + \\ &\quad \frac{\Xi_{1q,1} - \Xi_{1q,2} + \Xi_{1q,3}}{\Xi_{1q,1} + \Xi_{1q,2} + \Xi_{1q,3}} \theta_{1_{i-1}}'^k + \\ &\quad \frac{-\Xi_{1q,1} - \Xi_{1q,2} + \Xi_{1q,3}}{\Xi_{1q,1} + \Xi_{1q,2} + \Xi_{1q,3}} \theta_{1_i}^k - \\ &\quad \frac{\Xi_{1q,4}}{\Xi_{1q,1} + \Xi_{1q,2} + \Xi_{1q,3}} \left( \bar{\theta}_{1,-\frac{1}{2}} - \frac{\sum_{j=1}^{m^k+1} \bar{\theta}_{W_{i-\frac{1}{2},j}}}{m^k} \right). \end{aligned} \quad (D.18)$$

Abkürzungen:

$$\Xi_{1q,1} = 2(1 + \sigma_1^{k+\frac{1}{2}}) \Delta\tau \quad (D.19)$$

$$\Xi_{1q,2} = (\bar{N}_1 + N_1'^{k+\frac{1}{2}}) \Delta\xi^k \Delta\tau \quad (D.20)$$

$$\Xi_{1q,3} = 2\kappa_1 \Delta\xi^k \quad (D.21)$$

$$\Xi_{1q,4} = 4(N_1'^{k+\frac{1}{2}} - \sigma_1^{k+\frac{1}{2}} \bar{N}_1) \Delta\xi^k \Delta\tau \quad (D.22)$$

## D.2.2 Gasförmiger Hauptstrom

Die Werte an den Gitterpunkten  $\theta'_{1i=1}^{k=1,\dots,o+1}$  werden durch die Randbedingung vorgegeben.

Für  $i = 2$  wird ein Differenzenschema verwendet, bei dem die Ortsableitung der dimensionslosen Temperaturschwankung durch eine einfache Rückwärtsdifferenz approximiert wird:

$$\begin{aligned}\theta'_{12} &= f(\sigma_1^k, \bar{N}_1, N_1'^k, \bar{\theta}_{12,j}, \bar{\theta}_{W_{2,j}}, \theta_{W_{2,j}}^k, \Delta\xi) \\ &= \frac{\Xi_{1q,6}}{\Xi_{1q,5} + \Xi_{1q,6}} \frac{\sum_{j=1}^{m+1} \theta_{W_{2,j}}^k}{m} + \\ &\quad \frac{\Xi_{1q,5}}{\Xi_{1q,5} + \Xi_{1q,6}} \theta_{11}^k - \\ &\quad \frac{\Xi_{1q,7}}{\Xi_{1q,5} + \Xi_{1q,6}} (\bar{\theta}_{12} - \frac{\sum_{j=1}^{m+1} \bar{\theta}_{W_{2,j}}}{m}).\end{aligned}\quad (D.23)$$

Für  $i = 3, \dots, n^k + 1$  wird ein Differenzenschema verwendet, bei dem die Ortsableitung der dimensionslosen Temperaturschwankung durch die Drei-Punkte-Formel approximiert wird:

$$\begin{aligned}\theta'_{1i} &= f(\sigma_1^k, \bar{N}_1, N_1'^k, \bar{\theta}_{1i}, \bar{\theta}_{W_{i,j}}, \theta_{1i-2}^k, \theta_{1i-1}^k, \theta_{W_i}^k, \Delta\xi) \\ &= \frac{2\Xi_{1q,6}}{3\Xi_{1q,5} + 2\Xi_{1q,6}} \frac{\sum_{j=1}^{m+1} \theta_{W_{i,j}}^k}{m} - \\ &\quad \frac{\Xi_{1q,5}}{3\Xi_{1q,5} + 2\Xi_{1q,6}} \theta_{1i-2}^k + \\ &\quad \frac{4\Xi_{1q,5}}{3\Xi_{1q,5} + 2\Xi_{1q,6}} \theta_{1i-1}^k - \\ &\quad \frac{2\Xi_{1q,7}}{3\Xi_{1q,5} + 2\Xi_{1q,6}} (\bar{\theta}_{1i} - \frac{\sum_{j=1}^{m^k+1} \bar{\theta}_{W_{i,j}}}{m^k}).\end{aligned}\quad (D.24)$$

Abkürzungen:

$$\Xi_{1q,5} = 1 + \sigma_1^k \quad (D.25)$$

$$\Xi_{1q,6} = (\bar{N}_1 + N_1'^k) \Delta\xi \quad (D.26)$$

$$\Xi_{1q,7} = (N_1'^k - \sigma_1^k \bar{N}_1) \Delta\xi \quad (D.27)$$

### D.2.3 Umlaufstrom

Die Werte an den Gitterpunkten ( $i = 1, \dots, n^k + 1, j = 2$ ) werden mit dem FTBS-Schema berechnet:

$$\begin{aligned} \theta_{2,i,2}^{k+1} = & -\frac{1+\sigma_2^k}{\kappa_2} \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta^k} (\theta_{2,i,2}^k - \theta_{2,i,1}^k) - \frac{\Delta\tau}{\kappa_2} (\bar{N}_2 + N_2^k) (\theta_{2,i,2}^k - \theta_{W_{i,2}}^k) \\ & - \frac{\Delta\tau}{\kappa_2} (N_2^k - \sigma_2^k \bar{N}_2) (\bar{\theta}_{2,i,2} - \bar{\theta}_{W_{i,2}}) + \theta_{2,i,2}^k. \end{aligned} \quad (D.28)$$

Die Werte an den Gitterpunkten ( $i = 1, \dots, n^k + 1, j = 3, \dots, m^k + 1$ ) werden mit dem Wendroff-Schema berechnet:

$$\begin{aligned} \theta_{2,i,j}^{k+1} = & f(\sigma_2^{k+\frac{1}{2}}, \bar{N}_2, \kappa_2, N_2^{k+\frac{1}{2}}, \bar{\theta}_{2,i,j-\frac{1}{2}}, \bar{\theta}_{W_{i,j-\frac{1}{2}}}, \theta_{2,i,j-1}^{k+1}, \theta_{2,i,j-1}^k, \theta_{2,i,j}^k, \\ & \theta_{W_{i,j-1}}^{k+1}, \theta_{W_{i,j-1}}^k, \theta_{W_{i,j}}^k, \theta_{W_{i,j}}^{k+1}, \Delta\eta^k, \Delta\tau) \\ = & \frac{\Xi_{1q,8}}{\Xi_{1q,8} + \Xi_{1q,9} + \Xi_{1q,10}} (\theta_{W_{i,j-1}}^{k+1} + \theta_{W_{i,j-1}}^k + \theta_{W_{i,j}}^k + \theta_{W_{i,j}}^{k+1}) + \\ & \frac{\Xi_{1q,8} - \Xi_{1q,9} - \Xi_{1q,10}}{\Xi_{1q,8} + \Xi_{1q,9} + \Xi_{1q,10}} \theta_{2,i,j-1}^{k+1} + \\ & \frac{\Xi_{1q,8} - \Xi_{1q,9} + \Xi_{1q,10}}{\Xi_{1q,8} + \Xi_{1q,9} + \Xi_{1q,10}} \theta_{2,i,j-1}^k + \\ & \frac{-\Xi_{1q,8} - \Xi_{1q,9} + \Xi_{1q,10}}{\Xi_{1q,8} + \Xi_{1q,9} + \Xi_{1q,10}} \theta_{2,i,j}^k - \\ & \frac{\Xi_{1q,11}}{\Xi_{1q,8} + \Xi_{1q,9} + \Xi_{1q,10}} \left( \bar{\theta}_{2,i,j-\frac{1}{2}} - \bar{\theta}_{W_{i,j-\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (D.29)$$

Abkürzungen:

$$\Xi_{1q,8} = 2(1 + \sigma_2^{k+\frac{1}{2}}) \Delta\tau \quad (D.30)$$

$$\Xi_{1q,9} = (\bar{N}_2 + N_2^{k+\frac{1}{2}}) \Delta\eta^k \Delta\tau \quad (D.31)$$

$$\Xi_{1q,10} = 2\kappa_2 \Delta\eta^k \quad (D.32)$$

$$\Xi_{1q,11} = 4(N_2^{k+\frac{1}{2}} - \sigma_2^{k+\frac{1}{2}} \bar{N}_2) \Delta\eta^k \Delta\tau \quad (D.33)$$

Die Werte an den Gitterpunkten ( $i = 1, \dots, n^k + 1, j = 1$ ) ergeben sich aus der Koppelungsbedingung.

## D.2.4 Wandgleichung

Die Werte an den Gitterpunkten ( $i = 1, \dots, n^k + 1, j = 1, \dots, m^k + 1$ ) werden mit dem FTBS-Schema berechnet:

$$\begin{aligned} \theta'_{W_{i,j}}{}^{k+1} = & \frac{\Delta\tau}{\omega} \left[ N_1'^k (\bar{\theta}_{1_{i,j}} - \bar{\theta}_{W_{i,j}}) + (\bar{N}_1 + N_1'^k) (\theta'_{1_{i,j}}{}^k - \theta'_{W_{i,j}}{}^k) + \right. \\ & N_2'^k R_{2,1} (\bar{\theta}_{2_j} - \bar{\theta}_{W_{i,j}}) + (\bar{N}_2 + N_2'^k) R_{2,1} (\theta'_{2_j}{}^k - \theta'_{W_{i,j}}{}^k) \left. \right] \\ & + \theta'_{W_{i,j}}{}^k. \end{aligned} \quad (D.34)$$

## D.3 Gegenstrom

Beim Gegenstrom ist zu beachten, daß in jedem Zeitschritt für jedes Fluid auf einem eigenen Netz gerechnet werden muß, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten unterschiedlich groß sind.

### D.3.1 Hauptstrom

Die Werte an den Gitterpunkten  $\theta'_{1_{i=1}}{}^{k=1,\dots,o+1}$  werden durch die Randbedingungen vorgegeben.

Die Werte an den Gitterpunkten  $i = 2, \dots, n_1^k + 1$  werden mit dem Wendroff-Schema berechnet:

$$\begin{aligned} \theta'_{1_i}{}^{k+1} = & f(\sigma_1^{k+\frac{1}{2}}, \bar{N}_1, \kappa_1, N_1'^{k+\frac{1}{2}}, \bar{\theta}_{1_{i-\frac{1}{2}}}, \bar{\theta}_{W_{i-\frac{1}{2}}}, \theta'_{1_{i-1}}{}^{k+1}, \theta'_{1_{i-1}}{}^k, \theta'_{1_i}{}^k, \\ & \theta'_{W_{i-1}}{}^{k+1}, \theta'_{W_{i-1}}{}^k, \theta'_{W_i}{}^k, \theta'_{W_i}{}^{k+1}, \Delta\xi_1^k, \Delta\tau) \\ = & \frac{\Xi_{g,2}}{\Xi_{g,1} + \Xi_{g,2} + \Xi_{g,3}} (\theta'_{W_{i-1}}{}^{k+1} + \theta'_{W_{i-1}}{}^k + \theta'_{W_i}{}^k + \theta'_{W_i}{}^{k+1}) + \\ & \frac{\Xi_{g,1} - \Xi_{g,2} - \Xi_{g,3}}{\Xi_{g,1} + \Xi_{g,2} + \Xi_{g,3}} \theta'_{1_{i-1}}{}^{k+1} + \\ & \frac{\Xi_{g,1} - \Xi_{g,2} + \Xi_{g,3}}{\Xi_{g,1} + \Xi_{g,2} + \Xi_{g,3}} \theta'_{1_{i-1}}{}^k + \\ & \frac{-\Xi_{g,1} - \Xi_{g,2} + \Xi_{g,3}}{\Xi_{g,1} + \Xi_{g,2} + \Xi_{g,3}} \theta'_{1_i}{}^k - \\ & \frac{\Xi_{g,4}}{\Xi_{g,1} + \Xi_{g,2} + \Xi_{g,3}} (\bar{\theta}_{1_{i-\frac{1}{2}}} - \bar{\theta}_{W_{i-\frac{1}{2}}}). \end{aligned} \quad (D.35)$$

Abkürzungen:

$$\Xi_{g,1} = 2(1 + \sigma_1^{k+\frac{1}{2}})\Delta\tau \quad (D.36)$$

$$\Xi_{g,2} = (\bar{N}_1 + N_1'^{k+\frac{1}{2}})\Delta\xi_1^k\Delta\tau \quad (D.37)$$

$$\Xi_{g,3} = 2\kappa_1\Delta\xi_1^k \quad (D.38)$$

$$\Xi_{g,4} = 4(N_1'^{k+\frac{1}{2}} - \sigma_1^{k+\frac{1}{2}}\bar{N}_1)\Delta\xi_1^k\Delta\tau \quad (D.39)$$

### D.3.2 Gasförmiger Hauptstrom

Die Werte an den Gitterpunkten  $\theta_{i=1}^{k=1,\dots,o+1}$  werden durch die Randbedingung vorgegeben.

Für  $i = 2$  wird ein Differenzenschema verwendet, bei dem die Ortsableitung der dimensionslosen Temperaturschwankung durch eine einfache Rückwärtsdifferenz approximiert wird:

$$\begin{aligned} \theta_{1_2}'^k &= f(\sigma_1^k, \bar{N}_1, N_1'^k, \bar{\theta}_{1_2}, \bar{\theta}_{W_2}, \theta_{W_2}'^k, \Delta\xi) \\ &= \frac{\Xi_{g,6}}{\Xi_{g,5} + \Xi_{g,6}}\theta_{W_2}'^k + \\ &\quad \frac{\Xi_{g,5}}{\Xi_{g,5} + \Xi_{g,6}}\theta_{1_1}'^k - \\ &\quad \frac{\Xi_{g,7}}{\Xi_{g,5} + \Xi_{g,6}}(\bar{\theta}_{1_2} - \bar{\theta}_{W_2}). \end{aligned} \quad (D.40)$$

Für  $i = 3, \dots, n_1^k + 1$  wird ein Differenzenschema verwendet, bei dem die Ortsableitung der dimensionslosen Temperaturschwankung durch die Drei-Punkte-Formel approximiert wird:

$$\begin{aligned} \theta_{1_i}'^k &= f(\sigma_1^k, \bar{N}_1, N_1'^k, \bar{\theta}_{1_i}, \bar{\theta}_{W_i}, \theta_{1_{i-2}}'^k, \theta_{1_{i-1}}'^k, \theta_{W_i}'^k, \Delta\xi) \\ &= \frac{2\Xi_{g,6}}{3\Xi_{g,5} + 2\Xi_{g,6}}\theta_{W_i}'^k - \\ &\quad \frac{\Xi_{g,5}}{3\Xi_{g,5} + 2\Xi_{g,6}}\theta_{1_{i-2}}'^k + \\ &\quad \frac{4\Xi_{g,5}}{3\Xi_{g,5} + 2\Xi_{g,6}}\theta_{1_{i-1}}'^k - \\ &\quad \frac{2\Xi_{g,7}}{3\Xi_{g,5} + 2\Xi_{g,6}}(\bar{\theta}_{1_i} - \bar{\theta}_{W_i}). \end{aligned} \quad (D.41)$$

Abkürzungen:

$$\Xi_{g,5} = 1 + \sigma_1^k \quad (D.42)$$

$$\Xi_{g,6} = (\bar{N}_1 + N_1'^k) \Delta \xi \quad (D.43)$$

$$\Xi_{g,7} = (N_1'^k - \sigma_1^k \bar{N}_1) \Delta \xi \quad (D.44)$$

### D.3.3 Umlaufstrom

Die Werte an den Gitterpunkten  $i = n_2^k$  werden mit dem FTBS-Schema berechnet:

$$\begin{aligned} \theta_{2n_2}^{k+1} = & \frac{1 + \sigma_2^k}{\kappa_2} \frac{\Delta \tau}{\Delta \xi_2^k} (\theta_{2n_2+1}^{k+1} - \theta_{2n_2}^{k+1}) - \frac{\Delta \tau}{\kappa_2} (\bar{N}_2 + N_2'^k) (\theta_{2n_2}^{k+1} - \theta_{W_{n_2}}^{k+1}) \\ & - \frac{\Delta \tau}{\kappa_2} (N_2'^k - \sigma_2^k \bar{N}_2) (\bar{\theta}_{2n_2} - \bar{\theta}_{W_{n_2}}) + \theta_{2n_2}^{k+1}. \end{aligned} \quad (D.45)$$

Die Werte an den Gitterpunkten  $i = 1, \dots, n_2^k - 1$  werden mit dem Wendroff-Schema berechnet:

$$\begin{aligned} \theta_{2i}^{k+1} = & f(\sigma_2^{k+\frac{1}{2}}, \bar{N}_2, \kappa_2, N_2'^{k+\frac{1}{2}}, \bar{\theta}_{2i+\frac{1}{2}}, \bar{\theta}_{W_{i+\frac{1}{2}}}, \theta_{2i+1}^{k+1}, \theta_{2i+1}^k, \theta_{2i}^k, \\ & \theta_{W_i}^{k+1}, \theta_{W_i}^k, \theta_{W_{i+1}}^k, \theta_{W_{i+1}}^{k+1}, \Delta \xi_2^k, \Delta \tau) \\ = & \frac{\Xi_{g,8}}{\Xi_{g,8} + \Xi_{g,9} + \Xi_{g,10}} (\theta_{W_i}^{k+1} + \theta_{W_i}^k + \theta_{W_{i+1}}^k + \theta_{W_{i+1}}^{k+1}) + \\ & \frac{-\Xi_{g,8} - \Xi_{g,9} + \Xi_{g,10}}{\Xi_{g,8} + \Xi_{g,9} + \Xi_{g,10}} \theta_{2i}^k + \\ & \frac{\Xi_{g,8} - \Xi_{g,9} + \Xi_{g,10}}{\Xi_{g,8} + \Xi_{g,9} + \Xi_{g,10}} \theta_{2i+1}^k + \\ & \frac{\Xi_{g,8} - \Xi_{g,9} - \Xi_{g,10}}{\Xi_{g,8} + \Xi_{g,9} + \Xi_{g,10}} \theta_{2i+1}^{k+1} - \\ & \frac{\Xi_{g,11}}{\Xi_{g,8} + \Xi_{g,9} + \Xi_{g,10}} (\bar{\theta}_{2i+\frac{1}{2}} - \bar{\theta}_{W_{i+\frac{1}{2}}}). \end{aligned} \quad (D.46)$$

Abkürzungen:

$$\Xi_{g,8} = 2(1 + \sigma_2^{k+\frac{1}{2}}) \Delta \tau \quad (D.47)$$

$$\Xi_{g,9} = (\bar{N}_2 + N_2'^{k+\frac{1}{2}}) \Delta \xi_2^k \Delta \tau \quad (D.48)$$

$$\Xi_{g,10} = 2\kappa_2 \Delta \xi_2^k \quad (D.49)$$

$$\Xi_{g,11} = 4(N_2'^{k+\frac{1}{2}} - \sigma_2^{k+\frac{1}{2}} \bar{N}_2) \Delta \xi_2^k \Delta \tau \quad (D.50)$$

Die Werte an den Gitterpunkten  $i = n_2^k + 1$  ergeben sich aus der Kopplungsbedingung.



### D.3.4 Wandgleichung

Die Werte an den Gitterpunkten  $i = 1, \dots, n_1^k + 1$  und  $i = 1, \dots, n_2^k + 1$  werden mit dem FTBS-Schema berechnet:

$$\begin{aligned} \theta'_{W_i^{k+1}} = & \frac{\Delta\tau}{\omega} \left[ N_1'^k (\bar{\theta}_{1,i} - \bar{\theta}_{W_i}) + (\bar{N}_1 + N_1'^k) (\theta_{1,i}^k - \theta_{W_i}^k) + \right. \\ & N_2'^k R_{2,1} (\bar{\theta}_{2,i} - \bar{\theta}_{W_i}) + (\bar{N}_2 + N_2'^k) R_{2,1} (\theta_{2,i}^k - \theta_{W_i}^k) \left. \right] \\ & + \theta_{W_i}^k. \end{aligned} \quad (D.51)$$

## D.4 Verbindungsleitung

### D.4.1 Umlaufstrom

Die Werte an den Gitterpunkten  $i = 2$  werden mit dem FTBS-Schema berechnet:

$$\theta'_{2_2^{k+1}} = -\frac{1 + \sigma_2^k}{\kappa_2} \Delta\tau (\theta_{2_2}^k - \theta_{2_1}^k) - \frac{\Delta\tau}{\kappa_2} (\bar{N}_2 + N_2'^k) (\theta_{2_2}^k - \theta_{W_2}^k) + \theta_{2_2}^k. \quad (D.52)$$

Die Werte an den Gitterpunkten  $i = 3, \dots, n^k + 1$  werden mit dem Wendroff-Schema berechnet:

$$\begin{aligned} \theta'_{2_i^{k+1}} = & f(\sigma_2^{k+\frac{1}{2}}, \bar{N}_2, \kappa_2, N_1'^{k+\frac{1}{2}}, \theta_{2_{i-1}}^{k+1}, \theta_{2_{i-1}}^k, \theta_{2_i}^k, \\ & \theta_{W_{i-1}}^{k+1}, \theta_{W_{i-1}}^k, \theta_{W_i}^k, \theta_{W_i}^{k+1}, \Delta\zeta^k, \Delta\tau) \\ = & \frac{\Xi_{l,2}}{\Xi_{l,1} + \Xi_{l,2} + \Xi_{l,3}} (\theta_{W_{i-1}}^{k+1} + \theta_{W_{i-1}}^k + \theta_{W_i}^k + \theta_{W_i}^{k+1}) + \\ & \frac{\Xi_{l,1} - \Xi_{l,2} - \Xi_{l,3}}{\Xi_{l,1} + \Xi_{l,2} + \Xi_{l,3}} \theta_{2_{i-1}}^{k+1} + \\ & \frac{\Xi_{l,1} - \Xi_{l,2} + \Xi_{l,3}}{\Xi_{l,1} + \Xi_{l,2} + \Xi_{l,3}} \theta_{2_{i-1}}^k + \\ & \frac{-\Xi_{l,1} - \Xi_{l,2} + \Xi_{l,3}}{\Xi_{l,1} + \Xi_{l,2} + \Xi_{l,3}} \theta_{2_i}^k. \end{aligned} \quad (D.53)$$

Abkürzungen:

$$\Xi_{l,1} = 2(1 + \sigma_2^{k+\frac{1}{2}}) \Delta\tau \quad (D.54)$$

$$\Xi_{l,2} = (\bar{N}_2 + N_2'^{k+\frac{1}{2}}) \Delta\zeta^k \Delta\tau \quad (D.55)$$

$$\Xi_{l,3} = 2\kappa_2 \Delta\zeta^k \quad (D.56)$$

Die Werte an den Gitterpunkten  $i = 1$  ergeben sich aus den Kopplungsbedingungen.

### D.4.2 Wandgleichung

Die Werte an den Gitterpunkten  $i = 1, \dots, n^k + 1$  werden mit dem FTBS-Schema berechnet:

$$\theta_{W_i}^{\prime k+1} = \frac{\Delta \tau}{\omega} \left( \bar{N}_2 + N_2^{\prime k} \right) \left( \theta_{2_i}^{\prime k} - \theta_{W_i}^{\prime k} \right) + \theta_{W_i}^{\prime k}. \quad (\text{D.57})$$

## Literatur

- [1] VDI-Wärmeatlas, Berechnungsblätter für den Wärmeübergang. 7. Aufl., Düsseldorf: VDI-Verlag 1994
- [2] Strelow, O.: Eine allgemeine Berechnungsmethode für Wärmeübertragerschaltungen. Forschung im Ingenieurwesen 63 (1997) 255–261
- [3] Roetzel, W., Xuan, Y.: Dynamic Behaviour of Heat Exchangers. Boston: WIT Press 1999
- [4] Meierer, M., Eimer, N.: Langzeiterfahrung bei Betrieb, Instandhaltung und Optimierung des Wärmeverschiebesystems in einer Rauchgasentschwefelungsanlage. VGB Kraftwerkstechnik 9 (2000) 56–61
- [5] Schartmann, H.: Wärmerückgewinnung in RLT-Anlagen mit Abluftbefeuchtung. Luft- und Kältetechnik 3 (1996) 115–119
- [6] London, A.L., Kays, W.M.: The Liquid-Coupled Indirect-Transfer Regenerator for Gas-Turbine Plants. Trans. ASME 73 (1951) 529–542
- [7] Jansing, W., Klemm, J., Teubner, H.: Flüssigmetall-Wärmeverschiebesystem für Gasturbinen-Heizkraftwerke. Proceedings of the International Symposium Gas Turbines and Gas Cycle Plants: May 27-28, 1993, Bled, Slovenia / University of Ljubljana, Faculty of Mechanical Engineering. Bled 1993
- [8] Schneider, K.-U.: Gasturbinen-Heizkraftwerke mit Flüssigmetall-Wärmeverschiebesystem. Proceedings of the International Symposium Gas Turbines and Gas Cycle Plants: May 27-28, 1993, Bled, Slovenia / University of Ljubljana, Faculty of Mechanical Engineering. Bled 1993
- [9] Reay, D.A.: Heat Recovery Systems. London: E. & F.N. Spon Ltd. 1979
- [10] Martin, H.: Wärmeübertrager. Stuttgart: Georg Thieme Verlag 1988
- [11] Roetzel, W.: Thermische Auslegung von Wärmeübertragungssystemen mit umlaufendem Wärmeträger. BWK 42, 5 (1990) 254–258

- [12] Kays, W.M., London A.L.: Hochleistungswärmeübertrager. Berlin: Akademie Verlag 1973
- [13] Acklin, L., Läubli, F.: Die Berechnung des dynamischen Verhaltens von Wärmeaustauschern mit Hilfe von Analog-Rechengeräten. Sulzer Technische Rundschau. Forschungsheft (1960) 13–21
- [14] Bender, E.: Das dynamische Verhalten von Kreuzstromwärmeaustauschern für Massenstromvariationen. Regelungstechnik und Prozeß-Datenverarbeitung 1, 20 (1972) 13–20
- [15] Kabelac, S.: Die Berechnung des Zeitverhaltens berippter Kreuzstrom-Wärmeübertrager. Dissertation. Universität Hannover 1987
- [16] Ontko, J.S., Harris, J.A.: Compact Heat Exchangers: Transients in the Counterflow Heat Exchanger. A Festschrift for A.L. London, 531–548. New York: Hemisphere Publishing 1990
- [17] Xuan, Y., Roetzel, W.: Dynamics of shell-and-tube heat exchangers to arbitrary temperature and step flow variations. AIChE Journal 39 (1993), 413–421
- [18] Baehr, H. D., Stephan, K.: Wärme- und Stoffübertragung. Berlin: Springer 1994
- [19] Spang, B.: Wärmedurchgang und mittlere Temperaturdifferenz in Rekuperatoren. Habilitationsschrift, Universität der Bundeswehr Hamburg 1998, Internet-Publikation:  
<http://www.unibw-hamburg.de/MWEB/ift/ftd/netzpub/spang-habil.pdf>
- [20] Feldmann, D.: Repetitorium der Ingenieurmathematik Teil 1. 7. Aufl., Springer: Verlag C. Feldmann 1987
- [21] Roetzel, W.: Vorlesung Wärmeübertragung, Universität der Bundeswehr Hamburg, Hamburg 2000
- [22] Monagan, M.B., Geddes, K.O., Heal, K.M., Labahn, G., Vorkoetter, S.M.: Maple V Programming Guide.
- [23] Föllinger, O.: Regelungstechnik. Heidelberg: Hüthig Buch Verlag, 1992
- [24] Müller, I.: Grundzüge der Thermodynamik mit historischen Anmerkungen. Berlin: Springer 1994

- [25] Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie. 5. Aufl., Karlsruhe: G. Braun 1965
- [26] Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N.: Transport Phenomena. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1960
- [27] Schade, H., Kunz, E.: Strömungslehre. 2. Aufl., Berlin: de Gruyter 1989.
- [28] Schlünder, E.U., Martin, H.: Einführung in die Wärmeübertragung. 8. Aufl., Braunschweig: Vieweg 1995
- [29] Baehr, H.D.: Thermodynamik. 8. Aufl., Berlin: Springer 1992
- [30] Roetzel, W., Xuan, Y.: The effect of core longitudinal heat conduction on the transient behaviour of multipass shell-and-tube heat exchangers. Heat Transfer Engineering 14 (1993) 52–61
- [31] Roetzel, W., Xuan, Y.: The effect of heat conduction resistances of tubes and shells on transient behaviour of heat exchangers. Int. J. Heat Mass Transfer 36 (1993) 3967–3973
- [32] Brockmeier, U., Guentermann, Th., Fiebig, M.: Performance evaluation of a vortex generator heat transfer surface and comparison with different high performance surfaces. Int. J. Heat Mass Transfer 10 (1993) 2575–2587
- [33] Maglik, R.M., Bergles, A.E.: Heat transfer and pressure drop correlations for the rectangular offset strip fin compact heat exchanger. Experimental Thermal and Fluid Science 10 (1995) 171–180 New York: Springer 1998
- [34] Franke, D.: Systeme mit örtlich verteilten Parametern. Berlin: Springer 1987
- [35] Duchateau, P., Zachmann, D.W.: Partial Differential Equations. Singapore: McGraw-Hill 1986
- [36] Buckley, P.S.: Techniques of Process Control. New York: John Wiley & Sons 1964
- [37] Davies, B.: Integral transforms and their applications. New York: Springer 1978
- [38] Spiegel, M.R.: Laplace Transforms. New York: Mc Graw-Hill 1965
- [39] Honig, G.: Zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen mit Laplace-Transformation. Berichte der Kernforschungsanstalt Jülich. Jülich 1978.

- [40] Thomas, J.W.: Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. New York: Springer 1995
- [41] Feldmann, D.: Repetitorium der Ingenieurmathematik Teil 2. 3. Aufl., Springer: Verlag C. Feldmann 1989
- [42] Lahey/Fujitsu Fortran 95 User's Guide. Lahey Computer Systems, Inc. 1999
- [43] Levenspiel, O.: Chemical Reaction Engineering. Second Edition, New York: John Wiley & Sons 1972
- [44] Oppelt, W.: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge. 5. Aufl., Weinheim: Verlag Chemie 1972
- [45] Bronson, R: Differential Equations. New York: McGraw-Hill 1973

### **Literatur in alphabetischer Abfolge der Erstautoren**

- Acklin, L., Läubli, F.: Die Berechnung des dynamischen Verhaltens von Wärmeaustauschern mit Hilfe von Analog-Rechengeräten. Sulzer Technische Rundschau. Forschungsheft (1960) 13-21
- Baehr, H.D.: Thermodynamik. 8. Aufl., Berlin: Springer 1992
- Baehr, H. D., Stephan, K.: Wärme- und Stoffübertragung. Berlin: Springer 1994
- Bender, E.: Das dynamische Verhalten von Kreuzstromwärmeaustauschern für Massenstromvariationen. Regelungstechnik und Prozeß-Datenverarbeitung 1, 20 (1972) 13-20
- Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N.: Transport Phenomena. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1960
- Brockmeier, U., Guentermann, Th., Fiebig, M.: Performance evaluation of a vortex generator heat transfer surface and comparison with different high performance surfaces. Int. J. Heat Mass Transfer 10 (1993) 2575-2587
- Bronson, R: Differential Equations. New York: McGraw-Hill 1973
- Buckley, P.S.: Techniques of Process Control. New York: John Wiley & Sons 1964

- Davies, B.: Integral transforms and their applications. New York: Springer 1978
- Duchateau, P., Zachmann, D.W.: Partial Differential Equations. Singapore: McGraw-Hill 1986
- Feldmann, D.: Repetitorium der Ingenieurmathematik Teil 1. 7. Aufl., Springer: Verlag C. Feldmann 1987
- Feldmann, D.: Repetitorium der Ingenieurmathematik Teil 2. 3. Aufl., Springer: Verlag C. Feldmann 1989
- Föllinger, O.: Regelungstechnik. Heidelberg: Hüthig Buch Verlag, 1992
- Franke, D.: Systeme mit örtlich verteilten Parametern. Berlin: Springer 1987
- Honig, G.: Zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen mit Laplace-Transformation. Berichte der Kernforschungsanstalt Jülich. Jülich 1978.
- Jansing, W., Klemm, J., Teubner, H.: Flüssigmetall-Wärmeverschiebesystem für Gasturbinen-Heizkraftwerke. Proceedings of the International Symposium Gas Turbines and Gas Cycle Plants: May 27-28, 1993, Bled, Slovenia / University of Ljubljana, Faculty of Mechanical Engineering. Bled 1993
- Kabelac, S.: Die Berechnung des Zeitverhaltens berippter Kreuzstrom-Wärmeübertrager. Dissertation. Universität Hannover 1987
- Kays, W.M., London A.L.: Hochleistungswärmeübertrager. Berlin: Akademie Verlag 1973
- Lahey/Fujitsu Fortran 95 User's Guide. Lahey Computer Systems, Inc. 1999
- Levenspiel, O.: Chemical Reaction Engineering. Second Edition, New York: John Wiley & Sons 1972
- London, A.L., Kays, W.M.: The Liquid-Coupled Indirect-Transfer Regenerator for Gas-Turbine Plants. Trans. ASME 73 (1951) 529–542
- Maglik, R.M., Bergles, A.E.: Heat transfer and pressure drop correlations for the rectangular offset strip fin compact heat exchanger. Experimental Thermal and Fluid Science 10 (1995) 171–180
- Martin, H.: Wärmeübertrager. Stuttgart: Georg Thieme Verlag 1988

- Meierer, M., Eimer, N.: Langzeiterfahrung bei Betrieb, Instandhaltung und Optimierung des Wärmeverschiebesystems in einer Rauchgasentschwefelungsanlage. VGB Kraftwerkstechnik 9 (2000) 56–61
- Monagan, M.B., Geddes, K.O., Heal, K.M., Labahn, G., Vorkoetter, S.M.: Maple V Programming Guide. New York: Springer 1998
- Müller, I.: Grundzüge der Thermodynamik mit historischen Anmerkungen. Berlin: Springer 1994
- Ontko, J.S., Harris, J.A.: Compact Heat Exchangers: Transients in the Counterflow Heat Exchanger. A Festschrift for A.L. London, 531–548. New York: Hemisphere Publishing 1990
- Oppelt, W.: Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge. 5. Aufl., Weinheim: Verlag Chemie 1972
- Reay, D.A.: Heat Recovery Systems. London: E. & F.N. Spon Ltd. 1979
- Roetzel, W.: Thermische Auslegung von Wärmeübertragungssystemen mit umlaufendem Wärmeträger. BWK 42, 5 (1990) 254–258
- Roetzel, W., Xuan, Y.: The effect of core longitudinal heat conduction on the transient behaviour of multipass shell-and-tube heat exchangers. Heat Transfer Engineering 14 (1993) 52–61
- Roetzel, W., Xuan, Y.: The effect of heat conduction resistances of tubes and shells on transient behaviour of heat exchangers. Int. J. Heat Mass Transfer 36 (1993) 3967–3973
- Roetzel, W., Xuan, Y.: Dynamic Behaviour of Heat Exchangers. Boston: WIT Press 1999
- Roetzel, W.: Vorlesung Wärmeübertragung, Universität der Bundeswehr Hamburg, Hamburg 2000
- VDI-Wärmeatlas, Berechnungsblätter für den Wärmeübergang. 7. Aufl., Düsseldorf: VDI-Verlag 1994
- Schade, H., Kunz, E.: Strömungslehre. 2. Aufl., Berlin: de Gruyter 1989.



- Schartmann, H.: Wärmerückgewinnung in RLT-Anlagen mit Abluftbefeuchtung. Luft- und Kältetechnik 3 (1996) 115–119
- Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie. 5. Aufl., Karlsruhe: G. Braun 1965
- Schlünder, E.U., Martin, H.: Einführung in die Wärmeübertragung. 8. Aufl., Braunschweig: Vieweg 1995
- Schneider, K.-U.: Gasturbinen-Heizkraftwerke mit Flüssigmetall-Wärmeverschiebesystem. Proceedings of the International Symposium Gas Turbines and Gas Cycle Plants: May 27-28, 1993, Bled, Slovenia / University of Ljubljana, Faculty of Mechanical Engineering. Bled 1993
- Spang, B.: Wärmedurchgang und mittlere Temperaturdifferenz in Rekuperatoren. Habilitationsschrift, Universität der Bundeswehr Hamburg 1998, Internet-Publikation: <http://www.unibw-hamburg.de/MWEB/ift/ftd/netzpub/spang-habil.pdf>
- Spiegel, M.R.: Laplace Transforms. New York: Mc Graw-Hill 1965
- Strelow, O.: Eine allgemeine Berechnungsmethode für Wärmeübertragerschaltungen. Forschung im Ingenieurwesen 63 (1997) 255–261
- Thomas, J.W.: Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. New York: Springer 1995
- Xuan, Y., Roetzel, W.: Dynamics of shell-and-tube heat exchangers to arbitrary temperature and step flow variations. AIChE Journal 39 (1993) 413–421

## Lebenslauf

<b>Persönliche Daten</b>		Chakkrit Joseph Na Ranong Robert-Nhil-Straße 4 20099 Hamburg
Geburtsdatum, -ort		7. November 1966, Pinneberg
Staatsangehörigkeit		deutsch
Familienstand		ledig
<b>Schulbildung</b>	1969 - 1975	Kindergarten und zwei Jahre Grundschule in Thailand
	1976 - 1978	Grundschule Hainholz, Elmshorn
	1978 - 1986	Elsa-Brändström-Schule, Elmshorn
		Abschluß: Allgemeine Hochschulreife, Note: 1,3
<b>Wehrdienst</b>	1986 - 1987	Heeresflieger Bückeburg und Luftwaffenmusikkorps Hamburg
<b>Musikstudium</b>	1987 - 1990	Musikhochschule Hamburg, Oboe Engagements: Staatsoper Hamburg und Deutsches Schauspielhaus
<b>Maschinenbaustudium</b>	1990 - 1997	Universität Hannover
	1993	Diplom-Vorprüfung, Note: gut
	1997	Abschluß: Diplom-Ingenieur, Note: sehr gut
Grundpraktika	1/90 - 3/90	Deutsche Bundesbahn, Glückstadt
	3/93	Schaffran-Propeller, Lübeck
Fachpraktika	2/95 - 4/95	Daimler-Benz Aerospace Airbus GmbH, Bremen
	1/96 - 3/96	Continental AG, Hannover
Hilfswissenschaftler	10/94 - 1/95,	Institut für Mechanik
	5/95 - 11/95	
	3/96 - 5/96,	Institut für Thermodynamik
	6/97 - 9/97	
<b>Auslandsstudium</b>	6/96 - 12/96	University of Wollongong, Australien
<b>Wissenschaftlicher Assistent</b>	10/97 - 6/01	Universität der Bundeswehr Hamburg, Institut für Thermodynamik, bei Prof. Dr.-Ing. W. Roetzel
<b>Oberingenieur</b>	seit 7/01	Technische Universität Hamburg Harburg, Arbeitsbereich Verfahrenstechnischer Apparatebau, bei Prof. Dr.-Ing. J. Hapke